Seminar Nasional Quantum #25 (2018) 2477-1511 (9pp)

Penyelesaian persamaan schrodinger dalam pengaruh panjang minimal untuk potensial woods-saxon menggunakan supersimetri mekanika kuantum

Husnun Azizah[1], Suparmi[2], dan Cari[2]

[1]Jurusan Ilmu Fisika, Program Pascasarjana, Universitas Sebelas Maret, Indonesia
[2]Jurusan Ilmu Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret, Indonesia

E-mail: husnunhimawan@gmail.com

Abstrak. Penelitian ini dilakukan untuk menyelesaikan persamaaan Schrodinger dalam pengaruh panjang minimal untuk potensial Woods-Saxon. Penyelesaian dilakukan hanya pada bagian radial dengan mengaplikasikan pendekatan Pakeris. Penyelesaian secara analitik dilakukan menggunakan Supersimetri Mekanika Kuantum. Hasil analitik yang diperoleh berupa persamaan energi dan fungsi gelombang non-relativistik. Berdasarkan hasil analitik, terlihat bahwa persamaan energi dan fungsi gelombang yang diperoleh dipengaruhi oleh parameter panjang minimal. Selanjutnya dilakukan perhitungan numerik menggunakan software Matlab. Analisis terhadap hasil numerik menginformasikan bahwa energi meningkat sesuai dengan peningkatan nilai panjang minimal dan bilangan kuantum.

1. Pendahuluan

Sifat gelombang dari materi menunjukan adanya hubungan antara penentuan posisi dan momentum yang tidak mungkin dilakukan dengan pasti secara bersamaan. Besarnya ketidakpastian pengukuran tersebut dikenal dengan prinsip ketidakpastian Heisenberg [1,2]. Secara umum, diterapkannya gravitasi kuantum pada suatu sistem menjadikan energi sistem tersebut menjadi sangat tinggi dan menyebabkan adanya skala panjang minimal yang muncul. Efek gravitasi kuantum tersebut muncul dengan jarak yang sangat kecil dalam skala panjang Planck [3,4]. Prinsip ketidakpastian umum *(Generalized Uncertainty Principle*) diperoleh dari Adanya panjang minimal yang diterapkan pada prinsip ketidakpastian Heisenberg menjadi [5, 6]. Perbedaan antara keduanya terletak pada ada dan tidaknya pengaruh panjang minimal pada sebuah sistem kuantum.

Persamaan Schrodinger digunakan untuk menemukan energi dan fungsi gelombang pada sebuah sistem non-relatifistik. Energi dan fungsi gelombang tersebut begitu penting karena akan menginformasikan keadaan sistem [7]. Ditinjaunya suatu sistem non-relativistik dengan pengaruh gravitasi menyebabkan munculnya efek panjang minimal pada persamaan Schrodinger. Persamaan Schrodinger dalam pengaruh panjang minimal merupakan salah satu kajian yang menarik dan sedang berkembang. Penyelesaian persamaan Schrodinger dalam pengaruh panjang minimal telah digunakan dalam Woods-Sexon [5] dan *Square Well Potential* [8] pada kasus *scattering*.

Pada penelitian ini diselesaikan persamaan Schrodinger dalam pengaruh panjang minimal untuk potensial Woods-Saxon. Penyelesaian hanya dilakukan pada bagian radial. Adanya faktor sentrifugal menyebabkan persamaan Schrodinger tidak dapat diselesaikan dengan cara biasa. Maka digunakan pendekatan Pakeris dengan bentuk yang mirip dengan potensial Woods-Saxon. Dengan menggunakan pendekatan Pakeris, persamaan Schrodinger dalam pengaruh panjang minimal dapat diselesaikan menggunakan supersimetri mekanika kuantum. Supersimetri mekanika kuantum merupakan salah satu solusi dalam penentuan spektrum energi dan fungsi gelombang dari beberapa sistem dengan potensial yang memiliki sifat *invariance*.

Dalam penelitian ini, solusi persamaan Schrodinger berupa energi dan fungsi gelombang dianalisis terhadap nilai panjang minimal dan bilangan kuantum yang berbeda. Paper ini disusun sebagai berikut: bagian 2 menjelaskan tentang persamaan Schrodinger dengan panjang minimal, pada bagian 3 dijelaskan metode yang digunakan yaitu supersimetri mekanika kuantum dan potensial *shape invariance*. Bagian 4 disajikan hasil dan diskusi, baik secara analitik maupun numerik dan bagian 5 kesimpulan.

2. Persamaan Schrodinger dalam pengaruh panjang minimal

Hubungan komutasi kanonik umum termodifikasi dalam pengaruh panjang minimal didefinisikan seperti [4, 6]

$$\left[X,P\right]=i\hbar\left(1+\alpha P^2\right) \tag{1}$$

dimana

$$X_i=x_i\ ,\quad P_i=\left(1+\alpha p^2\right)p_i \tag{2}$$

α merupakan parameter panjang minimal dengan interval $0\le\alpha\le1$. p_i adalah operator momentum pada energi rendah dan P_i adalah operator momentum pada energi tinggi. sedangkan, p adalah besar vector p_i [4]. Pada energi rendah, energi jauh lebih kecil dari massa Planck sehingga suku kedua sisi kanan persamaan (2) hilang. Persamaan tersebut berubah menjadi persamaan yang kita kenal dengan perinsip ketidakpastian Heisenberg [5, 6].

Dengan mensubtitusikan momentum pada Persamaan (2) kedalam persamaan Schrodinger, dimana $p=-\hbar\nabla$, maka persamaan Schrodinger dalam pengaruh panjang minimal dituliskan dalam bentuk berikut

$$\left\{\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2-\frac{\alpha\hbar^4}{m}\Delta^2+V(r)\right\}\chi=E\chi \tag{3}$$

Untuk dapat menyelesaikan Persamaan (3), Δ^2 diperoleh dengan mengenolkan nilai α pada Persamaan (3) sehingga diperoleh

$$\Delta^2=\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^2\left[V(r)-E^0\right]^2 \tag{4}$$

Dalam mekanika kuantum, sistem yang digunakan dianggap berbentuk bola sehingga operator Laplacian yang digunakan [1] yaitu

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\Delta_\Omega \tag{5}$$

dimana

$$\Delta_\Omega=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{6}$$

Penyelesaian persamaan Schrodinger hanya dilakukan pada bagian radial, dimana Δ_Ω merupakan bagian sudut dari operator Laplacian

$$\Delta_\Omega Y_{\ell m}\left(\theta,\varphi\right)=-l\left(l+1\right)Y_{\ell m}\left(\theta,\varphi\right) \tag{7}$$

dengan menggunakan Persamaan (4) dan (5) maka Persamaan (3) tereduksi menjadi

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2}l\left(l+1\right)\right]+4\alpha m\left[V\left(r\right)-E^0\right]^2+\left(V\left(r\right)-E\right)\right\}\chi(r)=0 \tag{8}$$

agar suku pertama Persamaan (8) hanya dalam bentuk radial maka dilakukan subtitusi $\chi\left(r\right)=\frac{F\left(r\right)}{r}$ kedalam persamaan (8). Dengan menggunakan Persamaan (4) dan (5), persamaan Schrodinger pada Persamaan (8) menjadi

$$\left\{\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}l\left(l+1\right)-\left(4\alpha m\left[V\left(r\right)-E^0\right]^2+\left(V\left(r\right)-E\right)\right)\right\}F(r)=0 \tag{9}$$

Untuk menemukan bagian radial menggunakan pemisahan variabel, digunakan fungsi gelombang non-relativistik baru $F(r)=\Psi\left(r\right)Y_{\ell m}\left(\theta,\varphi\right)$, sehingga diperoleh

$$\left\{\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}l\left(l+1\right)+\left[-4\alpha m\left(V\left(r\right)-E^0\right)^2-\left(V\left(r\right)-E\right)\right]\right\}\Psi(r)=0 \tag{10}$$

Persamaan (10) merupakan persamaan Schrodinger dalam pengaruh panjang minimal.

3. Metode

3.1. Supersimetri Mekanika Kuantum

Teori supersimetri menggambarkan suatu model partikel dalam medan vakum serta interaksi antar partikel [9]. Supersimetri adalah simetri yang tetap invariant dibawah transformasi yang mengubah boson menjadi fermion dan sebaliknya [10, 11]. Operator supermuatan sebagai faktor utama penyusun SUSY Hamiltonian merupakan suatu konsep penting dalam supersimetri mekanika kuantum. Untuk N=2 operator supermuatan terdiri dari Q dan Q+ [10]. Dalam sistem mekanika kuantum, komutasi operator supermuatan dengan Hamiltonian supersimetri Hss memenuhi hubungan berikut

$$\left\{Q,Q^+\right\}=Q^+Q+QQ^+=H_{ss} \tag{11}$$

dimana operator supermuatan ditulis sebagai

$$Q=\begin{pmatrix}0 & 0\\ A^- & 0\end{pmatrix},\qquad Q^+=\begin{pmatrix}0 & A^+\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{12}$$

dan Hamiltonian supersimetri didefinisikan sebagai

$$H_{SS}=\begin{pmatrix}A^-A^+ & 0\\ 0 & A^+A^-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}H^+ & 0\\ 0 & H^-\end{pmatrix} \tag{13}$$

Parameter A^+ merupakan operator penaik dan A^- operator penurun

$$A^+=-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}+\phi(x)\quad \text{dan}\quad A^-=\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}+\phi(x) \tag{14}$$

Pasangan Hamiltonian supersimetri H_- yaitu,

$$H_+=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V_+(x) \tag{15}$$

$$H_-=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V_-(x) \tag{16}$$

dimana V_+ dan V_- disebut dengan pasangan potensial supersimetri.

3.2. Potensial *Shape* Invariance

Sepasang dengan bentuk yang sama dalam system kuantum disebut dengan potensial shape invariance. Apabila pasangan potensial tersebut digambarkan dalam bentuk grafik, maka akan memiliki bentuk yang sama walaupun garis tersebut tidak berhimpit [9]. Secara matematis pasangan superpotensial dapat di tulis seperti berikut

$$V_+\left(x,a_j\right)=\phi^2\left(x,a_j\right)+\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\phi'\left(x,a_j\right) \text{ dan } V_-\left(x,a_j\right)=\phi^2\left(x,a_j\right)-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\phi'\left(x,a_j\right) \tag{17}$$

dimana ϕ adalah superpotential. Lalu dengan menggunakan hubungan Hamiltonian SUSY dan Hamiltonian standar, kita dapat tuliskan

$$H_\pm=H^-+E_0=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V_-\left(x,a_j\right)+E_0 \tag{18}$$

Persamaan (18) dapat direduksi dalam bentuk potensial berikut

$$V_{eff}=V_-\left(x,a_j\right)+E_0=\phi^2\left(x,a_j\right)-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\phi'\left(x,a_j\right)+E_0 \tag{19}$$

$V\left(x\right)$ disebut dengan potensial efektif. Secara umum Hamiltonian ke-k ditulis

$$H_k=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V_-\left(x;\mathrm{a}_k\right)+\sum_{i=1}^{k}R\left(a_i\right)\ ,\quad k=0,1,2... \tag{20}$$

sehingga, energi non-relativistik dari H_- yaitu

$$E_n^{(-)}=\sum_{i=1}^{k}R(\mathrm{a}_i) \tag{21}$$

dalam bentuk Persamaan (17), $R\left(a_i\right)$ ditulis

$$R\left(a_i\right)=V_+(\mathrm{x};\mathrm{a}_{i-1})-V_-(\mathrm{x};\mathrm{a}_i) \tag{22}$$

Berdasarkan nilai E_0 yang kita peroleh dari Persamaan (18) dan E_n^- dari Persamaan (21), diperoleh energi non-relativistik total En yaitu

$$E_n=E_n^{(-)}+E_0 \tag{23}$$

dimana E_0 merupakan energi non-relativistik tingkat dasar pada pasangan Hamiltonian penurun. Untuk memperoleh fungsi gelombang tingkat dasar, fungsi gelombang tingkat dasar dikalikan dengan operator penurun dan hasilnya harus nol [9, 12, 13].

$$A\psi_0^{(-)}=0 \tag{24}$$

dengan oprasi hitung sederhana maka diperoleh

$$\psi_0^{(-)}\left(x,a_0\right)=N\exp\left[-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\int^x\phi\left(x,a_0\right)dx\right] \tag{25}$$

N merupakan konstanta normalisasi. Pada tingkat yang lebih tinggi, fungsi gelombang non-relativistik $\psi_n^-\left(n;a_0\right)$ ditentukan menggunakan operasi berantai operator penaik $\left(A^+\right)$ terhadap fungsi gelombang dibawahnya. Sehingga secara umum, fungsi gelombang non relativistik ke-n ditulis

$$\psi_n^-\left(x;a_0\right)\approx A^+\left(x;a_0\right)\psi_{n-1}^-\left(x;a_1\right) \tag{26}$$

$\psi_n^-\left(n;a_0\right)$ merupakan fungsi gelombang ke-n dari sistem.

4. Formatting the text

4.1. Penyelesaian Secara Analitik

Woods and Saxon memperkenalkan sebuah potensial untuk mempelajari elastic scattering dari proton 20MeV dengan inti berat [14]. Potensial tersebut dikenal dengan potensial Woods-Saxon. Potensial Woods-Saxon merupakan potential yang memiliki peran penting dalam fisika nuklir dan fisika mikroskopik. Potensial ini digunakan untuk mendeskripsikan interaksi dari neutron dengan inti berat. [15, 16]. Potensial Woods-Saxon dapat dituliskan dalam bentuk

$$V = -\frac{V_0}{1+e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}} \tag{27}$$

dimana $R_0 = r_0 A^{1/3}$, $V_0 = \left(40.5 + 0.13A\right) MeV$, $a \ll R$, V_0 menunjukan lebar potensial, R_0 merupakan jari-jari inti dengan $r_0 = 1,25\, fm$ dan A adalah nomor massa, sedangkan a merupakan konstanta yang berhubungan dengan ketebalan permukaan.

Persamaan Schrodinger untuk $\ell \neq 0$ menyebabkan adanya faktor sentrifugal sehingga persamaan tersebut tidak dapat diselesaikan dengan cara biasa. Adanya faktor sentrifugal mengharuskan kita menyelesaikan dengan metode yang berbeda yaitu dengan menggunakan sebuah pendekatan. Pendekatan ini didasarkan dari pengembangan faktor sentrifugal dalam sebuah deret eksponensial yang didasarkan pada jarak antar inti dengan mempertimbangkan persyaratan sampai orde kedua, sehingga potensi efektif yang diperoleh mempertahankan bentuk aslinya. Perlu di garis bawahi bahwa pendekatan ini hanya berlaku untuk keadaan energi dengan vibrasi rendah. Dengan mengubah koordinat $x = \frac{r - R_o}{R_o}$, $\delta = \frac{R_0}{a}$ maka persamaan bagian radial dapat disubtitusi dengan $r = R_o\left(x-1\right)$, dan diselesaikan dengan pendekatan Pakeris. Selanjutnya bentuk sentrifugal diperluas dalam deret Taylor di sekitar titik x=0 atau $r = R_0$. Untuk menyelesaikan bagian radial persamaan (10) maka digunakan pendekatan Pakeris berikut

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_0^{\,2}\left(1+x\right)^2} = \frac{1}{r_0^{\,2}}\left(1 - 2x + 3x^2 + ...\right) \tag{28}$$

Dengan mengasumsikan bentuk ke-empat dan seterusnya bernilai sangat kecil maka pendekatan yang digunakan hanya sampai pada suku ketiga. Selanjutnya bentuk rotasional diubah menjadi

$$1 - 2x + 3x^2 + ... = D_1 + D_2 \frac{1}{1+e^{\delta x}} + D_3 \left(\frac{1}{1+e^{\delta x}}\right)^2 + ... \tag{29}$$

atau disederhanakan menjadi

$$1 - 2x + 3x^2 + ... = D_1 + \frac{D_2}{2} + \frac{D_3}{4} + \frac{\delta}{4}\left(D_2 + D_3\right)x + \frac{\delta^2}{16} D_3 x^2 + ... \tag{30}$$

lalu dengan menyamakan suku-suku pada bagian kanan dan kiri persamaan, diperoleh [14-16] konstanta sebagai berikut

$$D_1 = 1 - \frac{4}{\delta} + \frac{12}{\delta^2}, \quad D_2 = \frac{8}{\delta} - \frac{48}{\delta^2}, \quad D_3 = \frac{48}{\delta^2} \tag{31}$$

Dengan demikian Persamaan (28) dapat ditulis ulang dalam bentuk

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0^{\,2}}\left(D_1 + D_2 \frac{1}{1+e^{\delta x}} + D_3 \left(\frac{1}{1+e^{\delta x}}\right)^2 + ...\right) \tag{32}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan Persamaan (32) dan mengenalkan parameter $\gamma = \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{R_o^{\,2}}$ maka Persamaan (10) menjadi

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\Psi(\mathrm{r})}{dr^2}-\gamma\left[D_1+D_2\frac{1}{1+e^{\delta x}}+D_3\left(\frac{1}{1+e^{\delta x}}\right)^2+...\right]\Psi(\mathrm{r})$$
$$+\left[-4\alpha\mu V_0^{\ 2}\left(\frac{1}{1+e^{\delta x}}\right)^2+\left(1-8\alpha\mu E^0\right)V_0\frac{1}{1+e^{\delta x}}+E-4\alpha\mu\left(E^0\right)^2\right]\Psi(\mathrm{r})=0 \tag{33}$$

dengan memperkenalkan parameter berikut

$$A_0=\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E-4\alpha\mu\left(E^0\right)^2-\gamma D_1\right],\qquad A_1=\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[\left(1-8\alpha\mu E^0\right)V_0-\gamma D_2\right]$$
$$A_2=\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[4\alpha\mu V_0^{\ 2}+\gamma D_3\right] \tag{34}$$

Persamaan (33) dapat ditulis menjadi lebih sederhana

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+\left(A_0+\frac{A_1}{1+e^{\delta x}}-\frac{A_2}{\left(1+e^{\delta x}\right)^2}\right)\Psi(x)=0 \tag{35}$$

dimana

$$\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E_{nl}-V_{eff}\right)=-A_0-\frac{A_1}{1+e^{\delta x}}+\frac{A_2}{\left(1+e^{\delta x}\right)^2} \tag{36}$$

Berdasarkan bentuk persamaan potensial efektif yang diperoleh, superpotensial yang sesuai adalah

$$\phi=-\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}\left(p+\frac{q}{1+e^{\delta x}}\right) \tag{37}$$

Dengan mensubtitusikan Persamaan (37) kedalam Persamaan (17), diperoleh

$$V_-=\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(p^2+\frac{2pq}{1+e^{\delta x}}+\frac{q^2}{\left(1+e^{\delta x}\right)^2}-\frac{q\delta e^{\delta x}}{\left(1+e^{\delta x}\right)^2}\right) \tag{38}$$

dan dengan mensubtitusikan Persamaan (38) kedalam Persamaan (19) maka kita memperoleh

$$\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(V_{eff}-\varepsilon_0\right)=p^2+\frac{2pq-\delta q}{1+e^{\delta x}}+\frac{q^2+\delta q}{\left(1+e^{\delta x}\right)^2} \tag{39}$$

Selanjutnya digunakan Persamaan (36) dan (39) seperti

$$-A_0-\frac{A_1}{1+e^{\delta x}}+\frac{A_2}{\left(1+e^{\delta x}\right)^2}=p^2+\frac{2pq+\delta q}{1+e^{\delta x}}+\frac{q^2-\delta q}{\left(1+e^{\delta x}\right)^2} \tag{40}$$

Lalu dengan menyamakan kedua ruas Persamaan (40), diperoleh nilai p dan q

$$p=\frac{-A_1}{-\delta+\sqrt{\delta^2-4A_2}}+\frac{\delta}{2}\ ,\qquad q=\frac{-\delta\pm\sqrt{\delta^2-4A_2}}{2} \tag{41}$$

dengan nilai energi faktorisasi

$$E_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{-A_1}{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4A_2}} + \frac{\delta}{2}\right)^2 + 4\alpha\mu\left(E^0\right)^2 + \gamma D_1 \tag{42}$$

Dengan mengambil definisi $p = \frac{A_2 - A_1}{2q} - \frac{q}{2}$, diperoleh pasangan superpotential berikut

$$V_- = \left(\frac{A_2 - A_1}{2q} - \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{A_2 - A_1 - \left[\left(q + \frac{1}{2}\delta\right)^2 - \frac{1}{4}\delta\right]}{1 + e^{\delta x}} + \frac{\left(q + \frac{1}{2}\delta\right)^2 - \frac{1}{4}\delta}{\left(1 + e^{\delta x}\right)^2} \tag{43}$$

$$V_+ = \left(\frac{A_2 - A_1}{2q} - \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{A_2 - A_1 - \left[\left(q - \frac{1}{2}\delta\right)^2 - \frac{1}{4}\delta\right]}{1 + e^{\delta x}} + \frac{\left(q - \frac{1}{2}\delta\right)^2 - \frac{1}{4}\delta}{\left(1 + e^{\delta x}\right)^2} \tag{44}$$

Dengan demikian kita dapat mengeneralisasi konstanta $a_n = q - n\delta$ untuk dapat menentukan potensial shape invariance pada nilai a_1 sampai ke a_n. dimana $R(a_n)$ tidak bergantung pada nilai n. Sehingga kita dapat menghitung

$$R(a_1) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\left(\frac{A_2 - A_1}{2q} - \frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{A_2 - A_1}{2(q-\delta)} - \frac{(q-\delta)}{2}\right)^2\right]$$

$$R(a_2) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\left(\frac{A_2 - A_1}{2(q-\delta)} - \frac{(q-\delta)}{2}\right)^2 - \left(\frac{A_2 - A_1}{2(q-2\delta)} - \frac{(q-2\delta)}{2}\right)^2\right]$$

....

....

$$\Sigma R(a_n) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\left(\frac{A_2 - A_1}{2(q-n\delta)} - \frac{(q-n\delta)}{2}\right)^2 - \left(\frac{A_2 - A_1}{2(q-(\mathrm{n}-1)\delta)} - \frac{(q-(\mathrm{n}-1)\delta)}{2}\right)^2\right] \tag{45}$$

Sesuai Persamaan (21), maka persamaan (45) merupakan nilai energi tingkat dasar. Dengan menjumlahkan Persamaan (42) dan (45), energi total pada Persamaan (23) diperoleh

$$E_{tot} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{A_2 - A_1}{2(q-n\delta)} - \frac{(q-n\delta)}{2}\right)^2 - \left(\frac{A_2 - A_1}{2q} - \frac{q}{2}\right)^2 \\ + \left(\frac{-A_1}{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4A_2}} + \frac{\delta}{2}\right)^2\end{array}\right] + 4\alpha\mu\left(E^0\right)^2 + \gamma D_1 \tag{46}$$

Dari persamaan (46) terlihat bahwa besarnya energi dipengaruhi oleh banyak hal diantaranya: massa inti (μ), bilangan kuantum (n), bilangan kuantum orbital (l), energi sistem tanpa panjang minimal (Eo), jari-jari inti (R_0), dan rasio antara jari-jari inti dan lebar potensial (δ), lebar potensial (V_0).

Adapun fungsi gelombang non-relativistik tingkat dasar sistem dihitung dengan menggunakan Persamaan (25) dan (37) adalah

$$\psi_0^{(-)} = N\left(\left(2\left(1+e^{\delta x}\right)^{\left(-\delta\pm\sqrt{\delta^2-4A_2}\right)\left(2x+2e^{\delta x}\right)}\right)e^{\left(\frac{-A_1}{-\delta+\sqrt{\delta^2-4A_2}}+\frac{\delta}{2}\right)x}\right) \quad (47)$$

Dilihat dari Persamaan (34), parameter A_1 dan A_1 merupakan parameter yang mengandung panjang minimal. Dengan demikian kita peroleh bahwa selain persamaan energi, fungsi gelombang keadaan dasar juga dipengaruhi oleh besarnya panjang minimal (α). Selain itu juga dipengaruhi oleh massa inti (μ), bilangan kuantum orbital (l), energi sistem tanpa panjang minimal (Eo), jari-jari inti (R_0), dan rasio antara jari-jari inti dan lebar potensial (δ), lebar potensial (V_0).

4.2. Hasil Numerik

Persamaan (46) merupakan persamaan energi yang diperoleh secara analitik. Berdasarkan persamaan energi tersebut, dapat dilakukan perhitungan numerik menggunakan aplikasi Matlab. Pengolahan hasil numerik dilakukan menggunakan parameter berikut: $A = 40$, $V_0 = \left(40{,}5 + 0{,}13A\right) fm^{-1}$, $\mu = 1 fm^{-1}$, $a = 0{,}65\, fm$. Perhitungan dilakukan dengan variasi bilangan kuantum orbital dalam fungsi panjang minimal. Berdasarkan hasil yang diperoleh, diamati hubungan bilangan kuantum orbital terhadap energi tingkat dasar sistem non-relativistik pada berbagai nilai parameter panjang minimal. Penyajian hasil dilakukan menggunakan tabel dan grafik. Tabel 1 menunjukan energi non-relativistik tingkat dasar .

Tabel 1. Energi Non Relativistik Tingkat Dasar dalam Fungsi Panjang Minimal dengan variasi bilangan kuantum orbital (l)

E(eV)			
n,l	**α = 0**	**α = 0.005**	**α = 0.01**
0,2	2.15954E+13	9.93989E+24	9.9426E+24
0,3	4.31909E+13	7.94802E+25	7.9523E+25
0,4	7.19848E+13	3.6770E+26	3.6803E+26
0,5	1.07977E+14	1.23993E+27	1.2416E+27
0,6	1.51168E+14	3.39862E+27	3.405E+27

Tabel 1 menjelaskan bagaimana panjang minimal dan bilangan kuantum orbital mempengaruhi nilai energi sistem. Dari Tabel 1 terlihat bahwa energi sistem dengan panjang minimal jauh lebih besar daripada sistem tanpa panjang minimal. Dengan kembali menganalisis Persamaan (46) terlihat bahwa untuk memperoleh energi dengan panjang minimal, nilai energi tanpa panjang minimal digunakan sebagai masukan. Nilai energi dengan panjang minimal yang lebih besar menghasilkan energi yang lebih besar, namun masih dalam orde yang sama. Selanjutnya untuk menjelaskan pengaruh bilangan kuantum orbital, Tabel 1 dapat kembali diamati dimana bilangan kuantum orbital divariasikan antara 2 sampai 6. Terlihat bahwa, baik dengan adanya parameter panjang minimal ataupun tidak, nilai energi selalu meningkat sesuai dengan meningkatnya nilai bilangan kuantum orbital.

5. Kesimpulan

Dalam penelitian ini, ditemukan solusi persamaan Schrodinger dengan panjang minimal pada potensial Woods-Saxon. Persamaan bagian radial diselesaikan dengan supersimetri mekanika kuantum menggunakan pendekatan Pakeris. Hasil yang diperoleh berupa fungsi gelombang dan persamaan energi sistem non-relativistik. Selain dilakukan perhitungan secara analitik, energi sistem juga dihitung secara numerik menggunakan software Matlab. Analisis hasil dilakukan dan disimpulkan bahwa pada berbagai nilai bilangan kuantum orbital, meningkatnya nilai parameter panjang minimal meningkatkan energi sistem. Pada sistem dengan panjang minimal atau tanpa panjang minimal, bilangan kuantum orbital yang lebih tinggi menghasilkan energi yang lebih tinggi pula. Adapun sistem dalam pengaruh panjang minimal memiliki energi yang jauh lebih besar dibanding sistem tanpa pengaruh panjang minimal.

6. Daftar pustaka

[1] Suparmi, and Cari. Mekanika Kuantum. Surakarta: Universitas Sebelas Maret, 2013.

[2] Moayedi, S. K., M. R. Setare and H. Moayeri. "Quantum Gravitational Corrections to the Real Klein-Gordon Field in the Presence of a Minimal Length." arXiv:1004.0563v1 (2010).

[3] Hossenfelder, Sabine. "The Minimal Length and Large Extra Dimensions." arXiv:hep-ph/0410122v1 (2004).

[4] Chabab, M., El Batoul, A., Lahbas, A., and Oulne, M. "On γ -rigid regime of the Bohr–Mottelson Hamiltonian in the presence of a minimal length." Physics Letters B, pp. 212–218, 2016.

[5] Hassanabadi, H., Zarrinkamar, S., and Maghsoodi, E. "Scattering states of Woods–Saxon interaction in minimal length quantum mechanics." Physics Letters B, pp. 678-682, 2012.

[6] Alimohammadi, M., and Hassanabadi, H. "Alternative solution of the gamma-rigid Bohr Hamiltonian in minimal length formalism." ScienceDirect, 439-339, 2017.

[7] Nozari, Kourosh, and Pedram, Pouria. "Minimal Length and Bouncing Particle Spectrum." arXiv:1011.5673v1, 2010.

[8] Haouat, S. "Schrödinger equation and resonant scattering in the presence of a minimal length." Physics Letters B, pp. 33–38, 2014.

[9] Saregar, Antomi. "Analisis Spektrum Energi dan Fungsi Gelombang Potensial Non-Central menggunakan Supersimetri Mekanika Kuantum." Jurnal Ilmiah Pendidikan Fisika Al-Biruni, 2015: 193-203.

[10] Filho, Elso Drigo, and Regina Maria Ricotta. "Morse potential energi spectra through the variational method and supersymmetry." arXiv:hep-th/9910254v1, 1999.

[11] Suparmi, and Cari. Mekanika Kuantum II. Surakarta: Universitas Sebelas Maret, 2013.

[12] Cari, Suparmi, and Marini, Heti. "Penentuan Spektrum Energi dan Fungsi Gelombang Potensial Morse dengan Koreksi Sentrifugal Menggunakan Metode SWKB dan Operator SUSY." Indonesian Journal of Applied Physics, pp.112-123, 2012.

[13] Saregar, Antomi, A.Suparmi, C. Cari, and H.Yuliani. "Analysis of Energi Spectra and Wave Function of Trigonometric Poschl-Teller plus Rosen-Morse Non-Central Potential Using Supersymmetric Quantum Mechanics Approach." International Journal Of Engineering And Science, 14-26, 2013.

[14] Feizi, Hamed, Ali Akbar Rajabi and Mohammad Reza Shojaei. "Supersymmetric Solution of The Schrödinger Equation for Woods–Saxon Potential by using The Pekeris Approximation." Acta Physica Polonica B (2004): vol.42, no.10, 2143-2152.

[15] Badalov, V. H., H. I. Ahmadov and A. I. Ahmadov. "Analytical solutions of the Schr¨odinger equation with the Woods-Saxon potential for arbitrary l state." arXiv:0905.2731v1 [math-ph] (2004).

[16] Aydogedu, O. and R. Sever. "Pseudospin and spin symmetry in the Dirac equation with Woods-Saxon potential and tensor potential." Eur. Phys. J. A (2010): 73-81.