Seminar Nasional Quantum #25 (2018) 2477-1511 (7pp)

Solusi alternatif persamaan klein-gordon dalam efek panjang minimal untuk potensial hulthen menggunakan *Asymptotic Iteration Method*

Isnaini Lilis Elviyanti, A Suparmi, dan C Cari

Jurusan Ilmu Fisika, Pascasarjana, Universitas Sebelas Maret

E-mail: isna.elviyanti@gmail.com

Abstrak. Efek panjang minimal terhadap energi dan fungsi gelombang dari partikel berspin nol dengan potensial Hulthen diselesaikan menggunakan persamaan Klein-Gordon. Persamaan Klein-Gordon diselesaikan secara analitik menggunakan *Asymptotic Iteration Method* (AIM) untuk memperoleh persamaan energi dan fungsi gelombang. Energi dari persamaan Klein-Gordon dihitung secara numerik menggunakan *software* Matlab, sedangkan fungsi gelombangnya disajikan dalam fungsi Hipergeometri. Hasil perhitungan secara numerik menunjukkan bahwa energi dari persamaan Klein-Gordon semakin meningkat karena meningkatnya parameter panjang minimal.

1. Pendahuluan

Perilaku partikel mikroskopik pada ruang lingkup relativistik dalam mekanika kuantum dapat dijelaskan menggunakan Persamaan Klein-Gordon yang dibangun atas potensial vektor $\left(V\left(r,\theta,\varphi\right)\right)$ dan potensial skalar $\left(S\left(r,\theta,\varphi\right)\right)$[1]. Persamaan Klein-Gordon merupakan pengembangan dari Persamaan Schordinger yang dapat diterapkan untuk partikel berspin nol [2]. Persamaan Klein-Gordon memiliki kondisi potensial skalar sama dengan potensial vektor $\left(S\left(r,\theta,\varphi\right)=V\left(r,\theta,\varphi\right)\right)$ dan potensial skalar sama dengan negatif potensial vektor $\left(S\left(r,\theta,\varphi\right)=-V\left(r,\theta,\varphi\right)\right)$. Pada kedua kondisi tersebut persamaan Klein-Gordon dapat direduksi menjadi seperti persamaan Schordinger, sehingga dapat diselesaikan menggunakan metode dalam mekanika kuatum non-relativistik seperti *Supersimetric Quantum mechanic* (SUSY) [3], Nikivorov Unvorof [4], dan *Asymptotic Iteration Method* [1].

Dalam mekanika kuantum, hubungan komutasi antara posisi dan momentum dijelaskan menggunakan prinsip ketidakpastian Heisenberg yang ditunjukkan oleh [5],

$$\left[\hat{X},\hat{P}\right]\geq i\hbar \tag{1}$$

dimana, $\hat{X}$ adalah operator posisi, $\hat{P}$ adalah operator momentum, i adalah bilangan *imaginer* dan $\hbar=h/2\pi$ dengan h adalah konstanta Planck . Ketika prinsip ketidakpastian Heisenberg dipengaruh oleh grafitasi kuatum maka disebut dengan *General Uncertainty Principle* (GUP) atau dapat disebut dengan panjang minimal [5]. Persamaan umum GUP yaitu,

$$\left[\hat{X},\hat{P}\right]\geq i\hbar\left(1+\alpha_{ML}P^{2}\right) \tag{2}$$

dimana, α_{ML} adalah parameter panjang minimal yang besarnya $0 \le \alpha_{ML} \le 1$ dan P adalah besaran momentum [6]. Saat energi lebih rendah dari massa Planck maka Persamaan (2) dapat tereduksi menjadi prinsip ketidakpastian Heisenberg [6]. Beberapa peneliti telah menerapkan efek panjang minimal dalam persamaan Klein-Gordon yang dipengaruhi oleh suatu potensial. Pada tahun 2009, persamaan Klein-Gordon dengan efek panjang minimal dipengaruhi oleh potensial trigonometri yang diselesaikan menggunakan pendekatan Algebarik [7]. Pada tahun selanjutnya, persamaan Klein-Gordon dengan efek panjang minimal diselesaikan menggunakan pendekatan Feyman untuk potensial linier [8], metode hipergeometri digunakan untuk potensial cotangen hiperbolik [9] dan AIM digunakan untuk potensial cotangen trigonometri [10,11].
Dalam penelitian ini, efek panjang minimal diterapkan dalam persamaan Klein-Gordon pada kondisi kondisi potensial skalar sama dengan potensial vektor yang dipengaruhi oleh potensial Hulthen. Penelitian ini hanya membatasi untuk penyelesaian persamaan Klein-Gordon pada bagian radial yang diselesaikan dengan AIM yang diperoleh persamaan energi dan persamaan fungsi gelombang.

2. Solusi alternatif Persamaan Klein-Gordon dalam efek panjang minimal

General Uncertainty Principle (GUP) atau panjang minimal merupakan hasil modifikasi hubungan komutasi antara posisi dan monentum dari prisnip ketidakpastian Heisenberg. Persamaan (2) yang menunjukkan GUP dapat ditulis sebagai berikut [5-6],

$$\hat{X}_i = \hat{x}_i \tag{3}$$

$$\hat{P}_i = \left(1+\alpha_{ML}\hat{p}^2\right)\hat{p}_i \tag{4}$$

dimana, $\hat{P}_i$ adalah operator momentum saat energi tinggi, $\hat{p}_i$ adalah operator momentum saat energi rendah, dan p adalah besarnya $\hat{p}_i$.

Persamaan Klein-Gordon secara umum yaitu [4,7],

$$\left(E - V\left(r,\theta,\varphi\right)\right)^2 \psi\left(r,\theta,\varphi\right) = \left[P^2c^2 + \left(M_oc^2 + S\left(r,\theta,\varphi\right)\right)^2\right]\psi\left(r,\theta,\varphi\right) \tag{5}$$

dengan, $V\left(r,\theta,\varphi\right)$ adalah potensial vektor, $S\left(r,\theta,\varphi\right)$ adalah potensial skalar, E adalah energi relativistik dan M_o adalah massa diam. Pada kasus spin simetri $\left(S\left(r,\theta,\varphi\right)=V\left(r,\theta,\varphi\right)\right)$ untuk persamaan Klein-Gordon yang kemudian disubstitusi dengan $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ dan $c = \hbar = 1$ (dalam *natural unit*) ke dalam Persamaan (5) maka diperoleh,

$$\left(E^2 - M_o{}^2 - \left(E + M_o\right)V\left(r,\theta,\varphi\right)\right)\psi\left(r,\theta,\varphi\right) = -\left(\Delta - 2\alpha_{ML}\Delta_0{}^2\right)\psi\left(r,\theta,\varphi\right) \tag{6}$$

Untuk kondisi tanpa dipengaruhi panjang minimal pada persamaan Klein-Gordon dimana $\alpha_{ML} = 0$, maka diperoleh

$$\Delta_0{}^2 = \left(E_0{}^2 - M_o{}^2 - \left(E_0 + M_o\right)V\left(r,\theta,\varphi\right)\right)^2 \tag{7}$$

dimana E_0 adalah energi relativistik pada kondisi tanpa efek panjang minimal. Bentuk $\Delta_0{}^2$ dari Persamaan (7) hanya bergantung pada potensial. Kemudian Persamaan (7) disubtitusikan pada Persamaan (6), sehingga didapatkan,

$$\left(E^2 - M_o{}^2 - \left(E + M_o\right)V\left(r,\theta,\varphi\right)\right)\psi\left(r,\theta,\varphi\right) = -\left(\Delta - 2\alpha_{ML}\left(E_0{}^2 - M_o{}^2 - \left(E_0 + M_o\right)V\left(r,\theta,\varphi\right)\right)^2\right)\psi\left(r,\theta,\varphi\right) \tag{8}$$

Sementara untuk operator Laplacian koordinat bola ditunjukkan oleh,

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \tag{9}$$

Persamaan (9) dimasukkan ke dalam Persamaan (8), kemudian dengan metode pemisahan variabel yang dimisalkan menggunakan fungsi gelombang baru $\psi\left(r,\theta,\varphi\right) = R\left(r\right)\Theta\left(\theta\right)\Phi\left(\varphi\right)$, maka diperoleh bagian polar dan radial dari persamaan Klein-Gordon dalam efek panjang minimal, yaitu untuk bagian polar,

$$-\left[\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}\right]=\lambda \tag{10}$$

dan bagian radial,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\left[\begin{matrix}\left(E^2-M_o{}^2-(E+M_o)V(r)\right)\\ -2\alpha_{ML}\left(\begin{matrix}\left(E_0{}^2-M_o{}^2\right)^2\\ -2\left(E_0{}^2-M_o{}^2\right)(E_0+M_o)V(r)\\ +(E_0+M_o)^2V^2(r)\end{matrix}\right)\end{matrix}\right]R(r)=\frac{\lambda}{r^2}R(r) \tag{11}$$

dimana λ adalah konstanta dari metode pemisahan variabel yang berhubungan dengan momentum angular (*L*). Untuk memperoleh energi relativistik dari persamaan Klein-Gordon maka dipilih yang bagian radial. Dengan mengaplikasikan $R(r)=U(r)/r$ dan $\lambda=L(L+1)$ ke dalam Persamaan (11), maka diperoleh

$$\frac{d^2U(r)}{dr^2}-\frac{L(L+1)}{r^2}U(r)+\left[\begin{matrix}\left(E^2-M_o{}^2-(E_0+M_o)V(r)\right)\\ -2\alpha_{ML}\left(\begin{matrix}\left(E_0{}^2-M_o{}^2\right)^2\\ -2\left(E_0{}^2-M_o{}^2\right)(E_0+M_o)V(r)\\ +(E_0+M_o)^2V^2(r)\end{matrix}\right)\end{matrix}\right]U(r)=0 \tag{12}$$

Persamaan (12) merupakan persamaan Klein-Gordon dalam efek panjang minimal pada kondisi spin simetri.

3. Asymptotic Iteration Method

Asymtotic Iteration Method (AIM) atau metode iterasi asimtotik merupakan salah satu metode untuk penyelesaian secara eksak dari persamaan differensial orde dua, yaitu [12,13]

$$y_n''(x)=\lambda_0(x)y_n'(x)+s_0(x)y_n(x) \tag{13}$$

dimana $\lambda_0(x)\neq 0$. Parameter n menunjukkan bilangan kuantum radial. Variabel $s_0(x)$ dan $\lambda_0(x)$ bersifat dapat didiferensialkan. Untuk memperoleh solusi dari persamaan (13) yaitu

$$y_n'''(x)=\lambda_1(x)y_n''(x)+s_1(x)y_n(x) \tag{14}$$

Dimana

$$\lambda_1(x)=\lambda_0'(x)+s_0(x)+\lambda_0{}^2(x) \tag{15}$$

$$s_1(x)=s_0'(x)+s_0(x)\lambda_0(x) \tag{16}$$

$$k=1,2,3... \tag{17}$$

Nilai eigen dihasilkan dari keadaan kuantisasi yaitu,

$$\Delta_k(x)=\lambda_k(x)s_{k-1}(x)-\lambda_{k-1}(x)s_k(x) \tag{18}$$

dimana *k* adalah bilangan iterasi. Bilangan kuantum radial *n* adalah sama dengan bilangan iterasi *k*. untuk menghasilkan fungsi gelombang maka persamaan (18) direduksi menjadi

$$y_n''(x)=2\left(\frac{ax^{N+1}}{1-bx^{N+2}}-\frac{t+1}{x}\right)y_n'(x)-\frac{wx^N}{1-bx^{N+2}}y_n(x) \tag{19}$$

Solusi eksak dari $y_n(x)$ adalah,

$$y_n(x)=(-1)^n C'(N+2)^n(\sigma)_n\ {}_2F_1\left(-n,\rho+n;\sigma;bx^{N+2}\right) \tag{20}$$

dengan,

$$(\sigma)_n = \frac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(\sigma)}; \quad \sigma = \frac{2t+N+3}{N+2}; \quad \rho = \frac{(2t+1)b+2a}{(N+2)b} \tag{21}$$

C' adalah konstanta normlisasi dan ${}_2F_1$ adalah fungsi hipergeometri. Untuk memperoleh fungsi gelombang maka digunakan Persamaan (19)-(21) [12,13].

4. Hasil dan Pembahasan

Potensial Hulthen merupakan potensial yang memiliki jangkaun pendek dalam fisika. Potensial ini digunakan dalam bidang fisika nuklir, fisika partikel dan fisika atom. Persamaan umum potensial Hulthen yaitu [14-15],

$$V(r) = -V_o\varpi \frac{e^{-2\varpi r}}{1-e^{-2\varpi r}} \tag{22}$$

dimana, V_o dan ϖ adalah konstanta potensial, r adalah jangkauan potensial. Untuk mendapatkan solusi yang sederhana, maka potensial Hulthen diubah dalam bentuk trigonometri hiperbolik, sehingga diperoleh,

$$V(r) = \frac{V_o\varpi}{2}(1-\coth\varpi r) \tag{23}$$

Untuk nilai r yang kecil dapat dilakukan pendekatan menggunakan pendekatan sentrifugal [16], yaitu

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\varpi^2}{\sinh^2\varpi r} \tag{24}$$

Dengan memasukan Persamaan (23)-(24) ke dalam Persamaan (12), maka didapatkan

$$\frac{d^2U(r)}{dr^2} - \left(\frac{\varpi^2 L(L+1) + \alpha_{ML}\delta^2 \frac{(V_o\varpi)^2}{2}}{\sinh^2\varpi r}\right)U(r) + \left(\left(\begin{array}{l}(E+M_o)\frac{(V_o\varpi)}{2} \\ +\alpha_{ML}\delta^2(V_o\varpi)^2 \\ -2\alpha_{ML}\chi(V_o\varpi)\end{array}\right)\coth\varpi r + \left(\begin{array}{l}(E^2-M_o{}^2)-(E+M_o)\frac{(V_o\varpi)}{2} \\ +2\alpha_{ML}\chi(V_o\varpi)-\alpha_{ML}\delta^2(V_o\varpi)^2 \\ -2\alpha_{ML}\eta^2\end{array}\right)\right)U(r) = 0 \tag{25}$$

dimana,

$$\delta = (E_0+M_o); \quad \chi = (E_0{}^2 - M_o{}^2)(E_0+M_o); \quad \eta = (E_0{}^2 - M_o{}^2) \tag{26}$$

Persamaan (25) merupakan persamaan Klein-Gordon pada kondisi spin simetri dalam efek panjang minimal yang dipengaruhi oleh potensial Hulthen. Kemudian, untuk memperoleh solusi sederhana dari Persamaan (25), maka Persamaan (25) direduksi menjadi,

$$\frac{d^2U(r)}{dr^2} - \left[\frac{v(v-1)}{\sinh^2\varpi r} - 2q\coth\varpi r + \kappa^2\right]U(r) = 0 \tag{27}$$

dengan,

$$v(v-1) = \left(\varpi^2 L(L+1) + \alpha_{ML}\delta^2\frac{(V_o\varpi)^2}{2}\right) \tag{28}$$

$$2q = \left(\left(E + M_o\right)\frac{\left(V_o\varpi\right)}{2} + \alpha_{ML}\delta^2\left(V_o\varpi\right)^2 - 2\alpha_{ML}\chi\left(V_o\varpi\right) \right) \tag{29}$$

$$-\kappa^2 = \left(\left(E^2 - M_o{}^2\right) - \left(E + M_o\right)\frac{\left(V_o\varpi\right)}{2} + 2\alpha_{ML}\chi\left(V_o\varpi\right) - \alpha_{ML}\delta^2\left(V_o\varpi\right)^2 - 2\alpha_{ML}\eta^2 \right) \tag{30}$$

Persamaan (27) merupakan persamaan diferensial yang harus direduksi ke dalam persamaan diferensial tipe hipergeometri. Dengan menggunakan variabel pengubah $\coth\varpi\,\mathrm{r} = 1 - 2y$ ke dalam Persamaan (27) maka didapatkan

$$y(1-y)\frac{d^2U(r)}{dy^2} + (1-2y)\frac{dU(r)}{dy} + \left[v'\left(v'-1\right) - \frac{4\alpha^2}{4y} - \frac{4\beta^2}{4(1-y)} \right]U(r) = 0 \tag{31}$$

dimana,

$$\frac{-2q+\kappa^2}{\varpi^2} = 4\alpha^2;\;\; \frac{2q+\kappa^2}{\varpi^2} = 4\beta^2;\;\; v'\left(v'-1\right) = \frac{v(v-1)}{\varpi^2} \tag{32}$$

Setelah diperoleh persamaan diferensial tipe hipergeometri yang ditunjukkan oleh Persamaan (31) , maka persamaan (31) direduksi ke dalam bentuk AIM menggunakan fungsi gelombang baru yaitu,

$$U(r) = y^{\alpha}(1-y)^{\beta} f(y) \tag{33}$$

Sehingga diperoleh,

$$y(1-y)\frac{f^2(y)}{dy^2} + \left[(2\alpha+1) - (2\alpha+2\beta+2)y\right]\frac{f(y)}{dy} + \left[v'\left(v'-1\right) - (\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\right]f(y) = 0 \tag{34}$$

Persamaan (34) dibagi dengan $y(1-y)$, maka

$$f''(y) + \left[\frac{(2\alpha+1)-(2\alpha+2\beta+2)y}{y(1-y)}\right]f'(y) + \left[\frac{v'\left(v'-1\right) - (\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}{y(1-y)}\right]f(y) = 0 \tag{35}$$

Persamaan (35) merupakan persamaan diferensial tipe AIM. Persamaan (35) dibandingkan dengan Persamaan (13), maka didapatkan

$$\lambda_0 = \frac{-(2\alpha+1)}{y} + \frac{(2\beta+1)}{1-y} \tag{36}$$

$$s_o = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1) - v'\left(v'-1\right)}{y} + \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1) - v'\left(v'-1\right)}{(1-y)} \tag{37}$$

Dengan menggunakan Persamaan (14)-(18) dan (35), maka diperoleh nilai eigen yaitu

$$v'\left(v'-1\right) = (\alpha+\beta+n)\left(\alpha+\beta+(n+1)\right) \tag{38}$$

Untuk memperoleh persamaan energi relativistik digunakan Persamaan (32) dan (38). Persamaan energi relativistik untuk persamaan Klein-Gordon dalam efek panjang minimal yaitu

$$\left(E^2 - M_o{}^2\right) = -\mu^2\left[\left(\sqrt{v'\left(v'-1\right)+\frac{1}{4}} - n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2\varpi^2}\left(\left(E+M_o\right)\left(\frac{V_o\varpi}{2}\right) + \xi_{\alpha_{ML}}\right)\right)^2}{\left(\sqrt{v'\left(v'-1\right)+\frac{1}{4}} - n - \frac{1}{2}\right)^2} \right] + \left(E+M_o\right)\left(\frac{V_o\varpi}{2}\right) + \gamma_{\alpha_{ML}} \tag{39}$$

dimana,

$$v' = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\left(\varpi^2 L(L+1) + \alpha_{ML}\delta^2\frac{\left(V_o\varpi\right)^2}{2}\right)}{\varpi^2} + \frac{1}{4}} \tag{40}$$

$$\xi_{\alpha_{ML}} = \alpha_{ML}\delta^2\left(V_o\varpi\right)^2 - 2\alpha_{ML}\chi\left(V_o\varpi\right) \tag{41}$$

$$\gamma_{\alpha_{ML}} = \alpha_{ML}\delta^2 \left(V_o\varpi\right)^2 - 2\alpha_{ML}\chi\left(V_o\varpi\right) + 2\alpha_{ML}\eta^2 \tag{42}$$

Persamaan (39) merupakan persamaan energi relativistik Klein Gordon pada kondisi spin simetri dalam efek panjang minimal yang dipengaruhi oleh potensial Hulthen. Persamaan (39) dihitung secara numerik menggunakan Matlab. Hasil perhitungan energi relativistik dari persamaan Klein-Gordon dalam efek panjang minimal ditunjukkan oleh Tabel 1.

Tabel 1. Energi relativistik dengan $M_o = 1$, $\varpi = 0.1$, dan $V_o = 1$

n	E (eV)			
	$\alpha_{ML} = 0$	$\alpha_{ML} = 0.001$	$\alpha_{ML} = 0.005$	$\alpha_{ML} = 0.01$
0	-2.2003	-2.1935	-2.1662	-2.1316
1	-2.0897	-2.0842	-2.0622	-2.0343
2	-1.9780	-1.9737	-1.9563	-1.9343
3	-1.8650	-1.8617	-1.8483	-1.8315
4	-1.7504	-1.7480	-1.7381	-1.7257
5	-1.6340	-1.6322	-1.6253	-1.6167

Table 1 menunjukkan energi relativistik meningkat ketika nilai parameter panjang minimal naik. Ketika bilangan kuantum meningkat, energi relativistik yang dihasilkan menurun. Energi relativistik ini bernilai negatif karena pegaruh dari potensial Hulthen [16].

Sementara untuk fungsi gelombang dari persamaan Klein-Gordon dalam efek panjang minimal untuk potensial Hulthen dapat diperoleh menggunakan Persamaan (18)-(21) dan variabel pengubah $\coth\varpi \mathrm{r} = 1 - 2y$ yang dimasukan ke Persamaan (33), sehingga dihasilkan

$$U_0\left(r\right) = C'\left(\frac{1-\coth\left(\varpi r\right)}{2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1+\coth\left(\varpi r\right)}{2}\right)^{\beta} \tag{43}$$

$$U_1\left(r\right) = \left\{ \begin{array}{l} -C'\left(\frac{1-\coth\left(\varpi r\right)}{2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1+\coth\left(\varpi r\right)}{2}\right)^{\beta} \\ \left(2\alpha+1\right)\left[1+\dfrac{\left(-1\right)\left(2\alpha+2\beta+2\right)\left(\frac{1-\coth\left(\varpi r\right)}{2}\right)}{\left(2\alpha+1\right)}\right] \end{array} \right\} \tag{44}$$

$$U_2\left(r\right) = \left\{ \begin{array}{l} C'\left(\frac{1-\coth\left(\varpi r\right)}{2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1+\coth\left(\varpi r\right)}{2}\right)^{\beta}\left(2\alpha+1\right)\left(2\alpha+2\right) \\ \left[\begin{array}{l} 1+\dfrac{\left(-2\right)_1\left(2\alpha+2\beta+3\right)_1\left(\frac{1-\coth\left(\varpi r\right)}{2}\right)^1}{\left(2\alpha+1\right)_1 1!} \\ +\dfrac{\left(-2\right)\left(-1\right)\left(2\alpha+2\beta+3\right)\left(2\alpha+2\beta+4\right)\left(\frac{1-\coth\left(\varpi r\right)}{2}\right)^2}{\left(2\alpha+1\right)\left(2\alpha+1\right)2} \end{array} \right] \end{array} \right\} \tag{45}$$

Persamaan (43), (44), dan (45) berturut-turut menunjukkan persamaan fungsi gelombang *n*=0 untuk keadaan *ground state*, *n*=1untuk keadaan energi level 1 dan *n*=2 untuk keadaan energi level 2.

5. Kesimpulan

Efek panjang minimal telah diterapkan pada Persamaan Klein-Gordon pada kasus potensial skalar sma dengan potensial vektor dipengaruhi oleh potensial Hulthen yang diselesaikan dengan metode AIM. Hasil dari penyelesaian yaitu persamaan energi relativistik dan persamaan fungsi gelombang. Energi relativistik untuk persamaan Klein-Gordon dengan efek panjang minimal menunjukkan bahwa energi relativistik meningkat ketika nilai parameter panjang minimal naik dan energi relativistik menurun ketika bilangan kuantum *n* meningkat.

6. Daftar Pustaka

[1] Nugraha D A, Suparmi A, Cari C dan Pratiwi BN 2017 *J. Phys. Conf. Ser* **795**.

[2] Sokolov L 1966 Quantum Mechanic Pubhlising House of Ministry of Education of RSFSR, Moscow

[3] Hassanabadi H, Zarrinkamar S, and Rahimov H 2011 *Commun. Theor. Phys* **56** 3 423–428.

[4] Ikhdair S M 2011 *arXiv:1110.0943v1 [quant-ph]* 1–25.

[5] Garay J L 1994 *International Journal of Modern Physics A***10** 2 145-165.

[6] Alimohammadi M dan Hassanabadi H 2017 *Nuclear Physics A* **957** 439-449.

[7] Jana K T dan Roy P 2009 *Physics Letters A***373** 1239–41.

[8] Merad M, Zeroual F, dan Benzair H 2010 *Electronic Journal of Theoretical Physics* **7** 23 41-56.

[9] Elviyanti I L, Suparmi A, Cari C, Nugraha D A dan Pratiwi B N 2017 *J. Phys. Conf. Ser* **909**.

[10] Suparmi A, Cari C, dan Elviyanti I L 2017 *J. Phys. Conf. Ser* **909.**

[11] Cari C, Suparmi A, dan Elviyanti I L 2017 *J. Phys. Conf. Ser* **909.**

[12] H Ciftci 2003 *J. Phys. A Math Gen* 36 47 11807-16.

[13] Pratiwi B N, Suparmi A, Cari C, dan Husein A S 2017 J. *Phys. Pramana*.

[14] L. Hulthen dan M. Sugawara, 1957 Handbuch der Physik, edited by S. Flugge (Springer, Berlin,), 39.

[15] Y. P. Varshni D 1990 *Physical Review A* **41** 9.

[16] Suparmi A, Cari C, dan Angraini L M 2015 *AIP Conference Proceedings* 060011-1-6.