

Korelasi antara tortuositas maksimum dan porositas medium berpori dengan model material berbentuk kubus

FW Ramadhan, S Viridi, dan FDE Latief

Program Studi Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Bandung
Jalan Ganesha 10, Bandung 40132, Indonesia

E-mail: fajar_wr@students.itb.ac.id; dudung@fi.itb.ac.id; fourier@fi.itb.ac.id

Abstrak. Tortuositas merupakan parameter penting dalam suatu medium berpori yang menggambarkan tingkat kompleksitas susunan poros ketika dilewati oleh fluida. Tortuositas dipakai di berbagai bidang, seperti eksplorasi migas untuk analisis reservoir, analisis pembuluh darah dalam dunia medis, analisis difusi massa dalam akar tumbuhan dan lain sebagainya. Tortuositas didefinisikan sebagai perbandingan antara jalur yang dilewati oleh fluida dan jarak terpendek dari satu titik ke titik lain. Dalam makalah ini, dibuat satu unit sel dengan total grid $N_s \times N_s \times N_s$ yang diisi oleh material dan poros berbentuk kubus. Model susunan material minimum pun dibentuk untuk menjamin unit sel tersebut tidak kolaps ketika memiliki porositas maksimum. Suatu medium dimodelkan mempunyai porositas maksimum ketika masih ada material yang menghubungkan 8 titik sudut dari suatu unit sel. Dari ruang yang tersedia, dihitung semua konfigurasi yang mungkin untuk menyusun poros dengan menggunakan pendekatan fisika statistik. Setiap konfigurasi mewakili mikrostate tertentu. Dengan bantuan komputasi, nilai tortuositas maksimum dihitung untuk setiap mikrostate. Hasil sebelumnya [1] masih belum cukup untuk menunjukkan hubungan antara tortuositas dan porositas dengan baik. Dengan model yang dibuat dalam makalah ini, didapat mikrostate yang lebih banyak dan prediksi nilai tortuositas yang sesuai untuk suatu porositas tertentu yakni semakin kecil porositas maka semakin besar tortuositasnya.

1. Pendahuluan

Tortuositas adalah besaran yang terkait dengan jalur yang dilewati oleh fluida dalam suatu medium berpori. Tortuositas didefinisikan sebagai hasil bagi antara panjang jalur aliran dengan lintasan terpendek. Semakin kompleks suatu medium, maka tortuositasnya akan semakin besar. Hubungan antara tortuositas dan porositas telah teliti dengan berbagai model dan persamaan seperti yang ditunjukkan pada [2, 3]. Dalam makalah ini, akan dihitung jumlah kemungkinan konfigurasi yang bisa dibentuk untuk satu porositas. Kemudian, dilakukan perhitungan tortuositas maksimum pada berbagai porositas.

Porositas dapat dihitung dengan definisi sebagai berikut [4] :

$$\Phi = \frac{V_V}{V_T} \quad (1)$$

dengan V_V adalah volume kosong dan V_T adalah volume total. Secara matematis, tortuositas didefinisikan dengan [5] :

$$T = \frac{\lambda_{avg}}{L} \tag{2}$$

dengan λ_{avg} merupakan jalur rata - rata yang dilewati oleh fluida dalam suatu medium berpori dan L adalah panjang dari model unit sel yang digunakan.

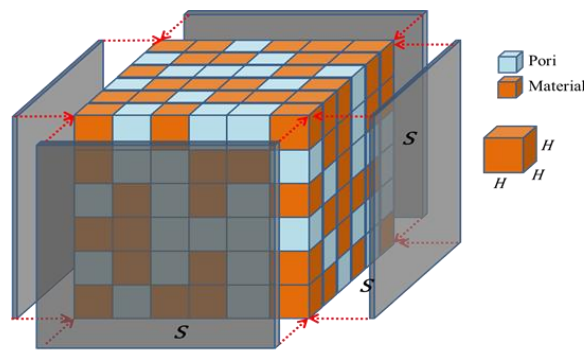
2. Metode Penelitian/Eksperimen

Dalam makalah ini, dibuat satu unit sel yang dibentuk dari material berbentuk kubus dengan dimensi $S \times S \times S$. Satu unit sel tersebut diisi oleh grid material atau pori dengan dimensi $H \times H \times H$. Dalam satu dimensi S, terdapat sejumlah N_s grid :

$$N_s = \frac{S}{H} \tag{3}$$

sehingga total grid dalam satu unit sel adalah

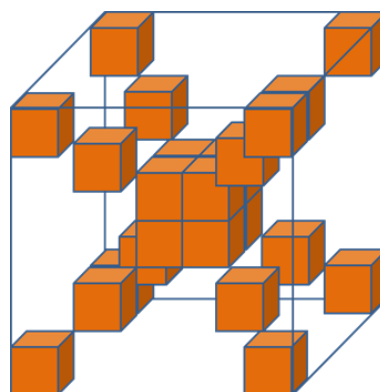
$$N = N_s \times N_s \times N_s \tag{4}$$



Gambar 1. Model sel dengan material berbentuk kubus

Grid berwarna jingga dan biru berturut turut merupakan material dan poros. Bagian berwarna abu – abu mewakili plat penghalang yang ditempelkan di sisi sel agar model tersebut bisa mengalirkan fluida dari atas ke bawah.

Untuk menjamin unit sel tidak kolaps ketika memiliki porositas maksimum, maka dibuat model susunan material minimum. Suatu unit sel dimodelkan mempunyai porositas maksimum ketika masih ada material yang menghubungkan 8 titik sudut dari unit sel tersebut. Berikut adalah ilustrasinya :



Gambar 2. Model material minimum agar unit sel tidak kolaps

Dengan adanya material minimum tersebut, tersisa sejumlah $N_s^3 - 4N_s$ grid yang bisa diisi oleh pori. Dengan kata lain, jika N_ϕ adalah jumlah grid pori yang akan dibentuk, maka nilai N_ϕ mestilah berada

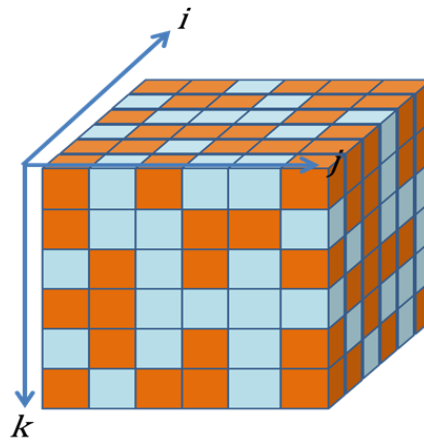
pada rentang $0 \leq N_\phi \leq N_s^3 - 4N_s$. Jika kita menggunakan persamaan (1), porositas unit sel tersebut adalah

$$0 \leq \phi = \frac{N_\phi}{N_s^3} \leq \frac{N_s^3 - 4N_s}{N_s^3} \quad (5)$$

Satu nilai porositas, akan memiliki ≥ 1 konfigurasi yang bisa dibentuk dalam unit sel. Perhitungan total kemungkinan konfigurasi didekati dengan fisika statistik [1]. Satu porositas akan mewakili makrostate tertentu dan semua kemungkinan konfigurasi pada porositas tersebut diwakili oleh mikrostate. Jumlah mikrostate untuk satu porositas tertentu dapat dihitung dengan

$$W_\phi = \frac{(N - 4N_s)!}{(N_\phi)!(N - 4N_s - N_\phi)!} \quad (6)$$

Setiap grid dalam unit sel memiliki indeks yang melambangkan lokasi grid. Arah indeks didefinisikan seperti gambar 3. Grid dengan indeks (i, j, k) direpresentasikan dengan matriks $G(i, j, k)$.

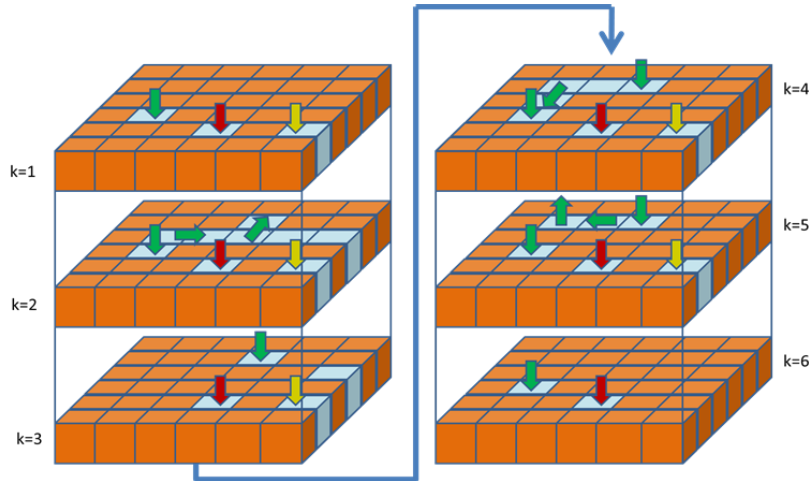


Gambar 3. Arah indeks grid

Dalam melakukan perhitungan porositas secara komputasi, grid poros dan material berturut turut diwakili dengan nilai 0 dan 1. Dari persamaan (2), λ_{avg} didapat dengan menentukan terlebih dahulu $\lambda(i_{awal}, j_{awal})$ yakni matriks yang berisi panjang jalur yang ditempuh menuju $k = N_s$ untuk setiap posisi awal $G(i_{awal}, j_{awal}, 1)$. Panjang jalur yang ditempuh dari $G(i_{awal}, j_{awal}, 1)$ menuju $G(i, j, N_s)$ ditentukan seperti berikut. Hitung panjang jalur pori ke arah $+k$. Jika $+k$ buntu, belok ke arah $+i$. Jika $+i$ buntu, belok ke arah $+j$. Jika $+j$ buntu, belok ke arah $-i$. Jika $-i$ buntu, belok ke arah $-j$. Jika $-j$ buntu, belok ke arah $-k$. Jika $-k$ buntu, kembali ke percabangan sebelumnya. Perhitungan tersebut dilakukan dengan syarat tidak melewati grid yang sama untuk suatu posisi awal, tidak ada jalur yang berpapasan dan tidak kembali ke grid $k = 1$. Proses selanjutnya, diambil nilai panjang jalur yang telah mencapai grid $k = N_s$ dari matriks $\lambda(i_{awal}, j_{awal})$ untuk kemudian dihitung nilai rata ratatnya sehingga didapat λ_{avg} . Dengan begitu, didapatlah nilai tortuositas (T) untuk suatu mikrostate tertentu.

Gambr 4 adalah contoh perhitungan tortuositas pada sel dengan $N_s = 6$ dan $N_\phi = 31$ yang memiliki 3 posisi awal (i_{awal}, j_{awal}) . Arah dengan warna merah, kuning dan hijau berturut turut menunjukkan posisi awal $(2,4)$, $(2,6)$ dan $(3,2)$. $\lambda(2,6)$ tidak masuk perhitungan λ_{avg} karena jalurnya tidak

mencapai $k = 6$. Matriks $\lambda(i_{awal}, j_{awal})$ secara lengkap dapat dilihat pada gambar 5. Dari matriks tersebut, didapat nilai $T = 1.833$.



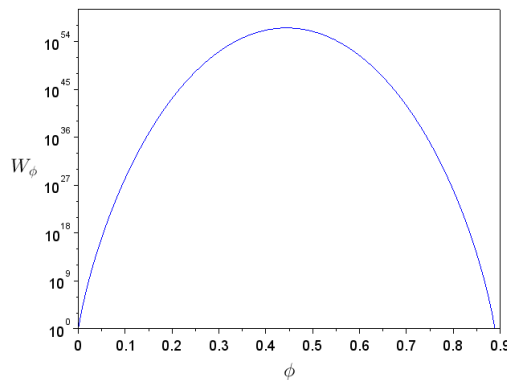
Gambar 4. Contoh perhitungan tortuositas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambar 5. Matriks $\lambda(i_{awal}, j_{awal})$ untuk sel gambar 4

3. Hasil dan Pembahasan

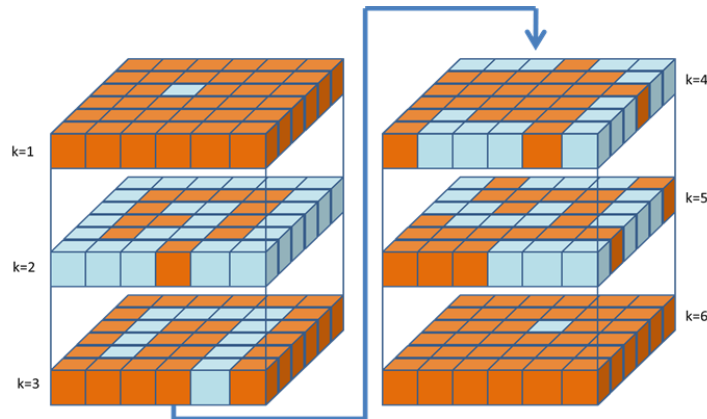
Sesuai persamaan (6), akan ada sejumlah mikrostate W_ϕ untuk suatu porositas (ϕ). Dengan menghubungkan persamaan (5) dan (6), didapat hasil seperti berikut ($N_s = 6$).



Gambar 6. Plot W_ϕ terhadap ϕ untuk $N_s = 6$ dalam skala semi log.

Mikrostate terbesar berada pada $\phi = 0,5$ dengan nilai $W_\phi = 3,0581E + 56$. Saat ini, tidak mungkin untuk menghitung tortuositas pada mikrostate sebanyak itu. T_{maks} lah yang paling mungkin dihitung

untuk suatu porositas tertentu. Untuk $0 \leq N_\phi \leq 5$ atau $0 \leq \phi \leq 0,0231$, tidak memiliki mikrostate yang menghasilkan tortuositas. Karena untuk menghubungkan sisi $k = 1$ dan $k = N_s = 6$ dibutuhkan minimal $N_\phi = 6$. Misal kita ambil N_ϕ minimum yang bisa disusun agar menghasilkan T maksimum adalah $N_\phi = 67$ dengan mikrostate seperti gambar 7. T maksimum pada mikrostate tersebut adalah 11.167.

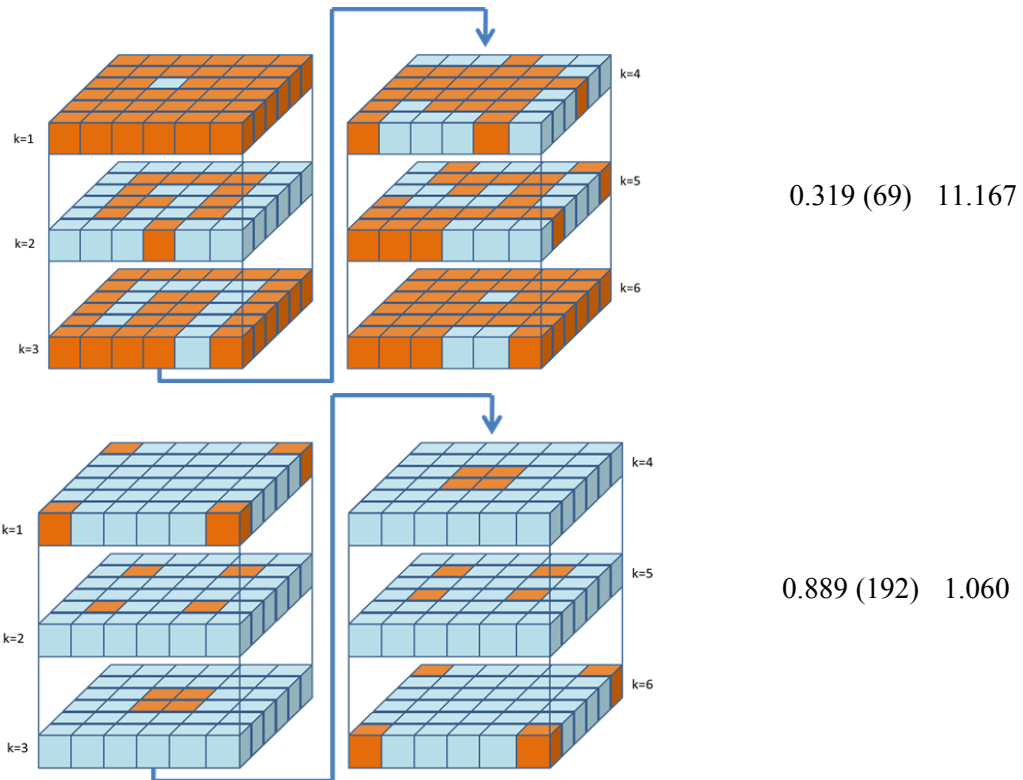


Gambar 7. Mikrostate yang menghasilkan T maksimum untuk $N_\phi = 67$

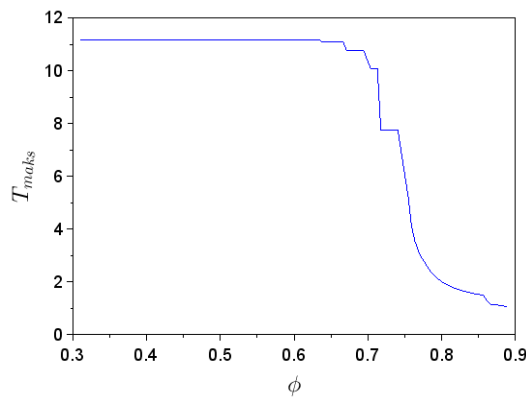
Dengan mengasumsikan $T = 11,167$ adalah maksimum untuk semua mikrostate dan makrostate, maka T maksimum untuk N_s yang lebih besar bisa dicari dengan menambahkan grid poros pada lokasi yang bukan bagian dari susunan material minimum. Lokasi yang akan dipilih sebagai grid poros berikutnya adalah lokasi yang menghasilkan maksimum untuk porositas tersebut. Hal yang sama dilakukan untuk N_s berikutnya hingga $N_s = 192$. Tabel berikut memperlihatkan beberapa T maksimum untuk $N_\phi > 67$.

Table 1. Beberapa T maksimum untuk $N_\phi > 67$.

Mikrostate	$\phi(N_\phi)$	T_{maks}
	0.315 (68)	11.167



Secara lengkap, nilai T_{maks} untuk $11,167 \leq \phi \leq 0,889$ atau $67 \leq N_{\phi} \leq 192$ dapat dilihat pada gambar 8.

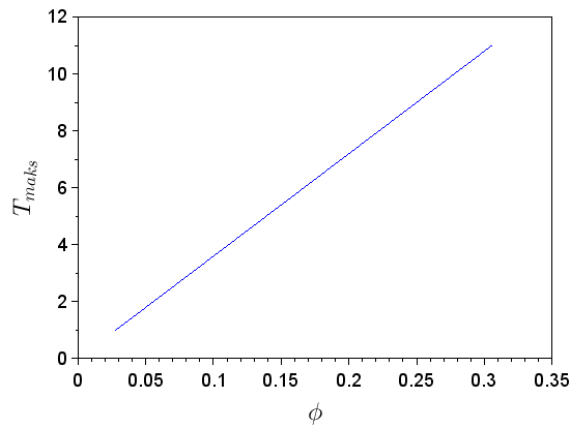


Gambar 8. Hubungan antara T_{maks} dengan ϕ untuk $0,310 \leq \phi \leq 0,889$.

Gambar 8 menunjukkan nilai T_{maks} untuk setiap ϕ pada $0,310 \leq \phi \leq 0,889$. Artinya, untuk satu nilai ϕ terdapat W_{ϕ} mikrostate dan sebagian dari W_{ϕ} tersebut ada yang menghasilkan tortuositas dengan nilai $1 \leq T \leq T_{maks}$.

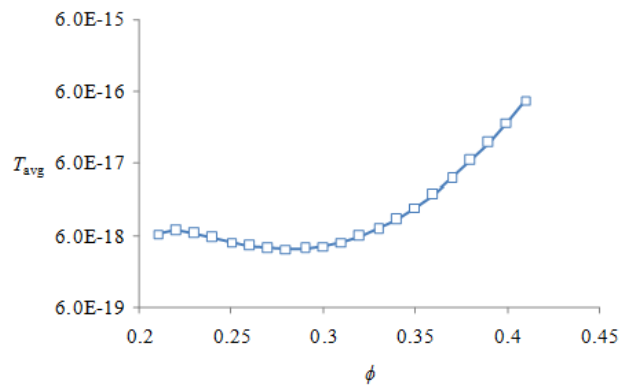
Untuk T_{maks} pada $0 \leq \phi \leq 0,306$ atau $0 \leq N_{\phi} \leq 66$, hubungannya dapat dilihat pada gambar 9. Pada gambar tersebut, nilai T_{maks} akan mengecil seiring dengan mengecilnya porositas. Hal ini karena jumlah grid pori sudah tidak mencukupi lagi untuk membuat T_{maks} yang lebih besar. Selanjutnya,

husus untuk $0 \leq \phi \leq 0,023$ atau $0 \leq N_\phi \leq 5$, nilai T_{maks} tidak terdefinisi karena tidak ada mikrostate yang dapat menghubungkan lapisan $k = 1$ dengan $k = 6$.



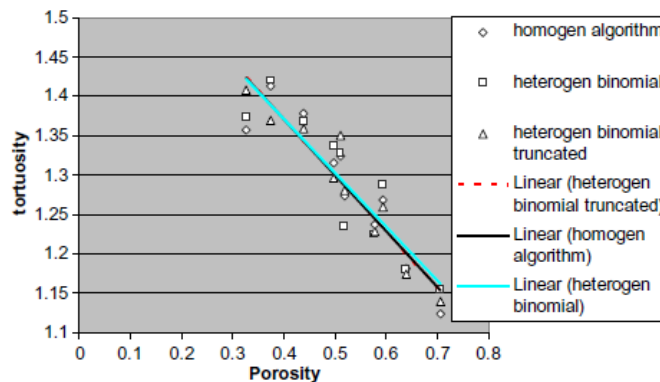
Gambar 9. Hubungan antara T_{maks} dengan ϕ untuk $0 \leq \phi \leq 0,306$

Penelitian sebelumnya [1] menunjukkan hasil seperti gambar 10. Pada gambar tersebut, kecenderungan tortuositas dalam hal ini nilai rata-rata nya semakin kecil seiring dengan mengecilnya porositas. Walaupun yang ditampilkan pada gambar 10 merupakan tortuositas rata-rata, penyebabnya adalah sama seperti yang terjadi pada gambar 9. Selanjutnya, nilai tortuositas pada gambar 10 $< 10^{-16}$ atau dengan kata lain < 1 . Hal tersebut terjadi karena banyak mikrostate yang tidak menghubungkan antara satu sisi sel dengan sisi lainnya namun masuk dalam perhitungan.



Gambar 10. Hubungan antara T_{avg} dengan ϕ [1]

Contoh hasil penelitian lain [6] ditunjukkan pada gambar 11. Jika kita bandingkan gambar 11 dengan gambar 8, terdapat korelasi yang sama yakni semakin kecil porositas, maka nilai tortuositas semakin besar. Tentunya gambar 8 menunjukkan T yang lebih besar karena yang dihitung merupakan T maksimum untuk ϕ tertentu.



Gambar 11. Tortuositas rata - rata sebagai fungsi dari porositas untuk fraktal 2 dimensi dengan model *RSCs* [6]

Selain kecenderungan nilai tortuositas yang semakin besar seiring dengan mengecilnya porositas, hasil saat ini memberikan gambaran bahwa dimungkinkan menemukan T pada ϕ tertentu berada pada nilai T_{maks} seperti yang ditunjukkan pada gambar 8. Penelitian lanjutan dapat dilakukan untuk menganalisis probabilitas terbesar / sebaran nilai T pada rentang $1 \leq T \leq T_{maks}$ untuk suatu nilai ϕ yang diberikan.

4. Kesimpulan

Korelasi antara tortuositas dan porositas medium berpori dengan model material berbentuk kubus telah dibuat. Seperti yang ditunjukkan pada gambar 8, nilai tortuositas maksimum akan semakin besar jika porositasnya semakin kecil. Kecenderungan nilai T_{maks} yang semakin besar ketika ϕ mengecil tidak terjadi pada $0 \leq \phi \leq 0,306$ atau $0 \leq N_\phi \leq 66$ karena jumlah grid pori sudah tidak mencukupi lagi untuk menghasilkan T_{maks} yang lebih besar. Khusus untuk $0 \leq \phi \leq 0,023$ atau $0 \leq N_\phi \leq 5$, nilai T_{maks} tidak terdefinisi karena tidak ada mikrostate yang dapat menghubungkan lapisan paling atas dan paling bawah. Untuk suatu porositas (ϕ) tertentu, nilai tortuositas (T) lainnya terdapat pada rentang $1 \leq T \leq T_{maks}$. Jika model pada makalah ini digunakan pada $N_s = 6$, dihasilkan $T_{maks} = 11,167$. Hasil penelitian lain pun menunjukan kecenderungan hubungan tortuositas dan porositas yang sama.

5. Daftar Pustaka

- [1] Viridi S, Latief F D E, Khotimah SN 2017 *J. Phys.: Conf. Ser.* 877 012044
- [2] Xiao-Wu T, Zu-Feng S dan Guan-Chu C 2012 *Chin. Phys. B* 21 100201
- [3] Batys P dan Weroński P 2014 *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 22 065017
- [4] Hilfer R 1992 *Phys. Rev. B* 45 7115
- [5] Matyka M, Khalili A, Koza Z 2008 *Phys. Rev E* 78 026306
- [6] Feranie S dan Latief F D E 2013 *Fractals* 21 1350013