

Dual Reciprocity Boundary Element Methods (DRBEM) pada Masalah Infiltrasi Stasioner dari Saluran Irigasi Tunggal Bentuk Trapesium

Munadi^{1,2}, Imam Solekudin¹, Sumardi¹, Atok Zulijanto¹

¹Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada, Daerah Istimewa Yogyakarta

²Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Pancasakti Tegal, Jawa Tengah

Abstrak. Dalam makalah ini dibahas masalah infiltrasi dari saluran tunggal bentuk trapesium. Persamaan pengatur masalah ini adalah persamaan Richard. Persamaan tersebut dapat dipelajari lebih mudah dengan mentransformasikannya menjadi persamaan Helmholtz termodifikasi. Dalam penelitian ini, *Dual Reciprocity Boundary Element Methods (DRBEM)* digunakan untuk memecahkan persamaan Helmholtz termodifikasi secara numerik. Dengan menggunakan solusi yang diperoleh, nilai numerik dari potensial fluks matrik kemudian dihitung. Metode tersebut diterapkan pada masalah infiltrasi stasioner dalam tanah homogen dari saluran tunggal bentuk trapesium berlapisan kedap air dan yang tidak berlapisan kedap air. Solusi numerik yang diperoleh dari kedua saluran kemudian dibandingkan.

Keyword. persamaan Richard, persamaan Helmholtz termodifikasi, potensial fluks matrik, DRBEM, saluran irigasi tunggal.

1. Pendahuluan

Salah satu jenis irigasi adalah irigasi air permukaan. Menurut Nuhsin [11], sumber air permukaan yang dapat dimanfaatkan sebagai sumber air irigasi adalah air bekas galian tambang/air kolong, terjunan air, aliran sungai, mata air, dan sebagainya. Dalam makalah ini, pembahasan difokuskan pada irigasi air permukaan yang menggunakan sumber air yang berupa aliran sungai.

Jadi yang dimaksud dengan istilah saluran irigasi tunggal dalam makalah ini adalah saluran buatan atau sungai baik sungai besar maupun kecil yang membelah area pertanian atau perkebunan. Saluran irigasi jenis ini masih banyak dijumpai di desa-desa yang saluran irigasinya belum dimodernisasi/betonisasi. Ilustrasi saluran irigasi tunggal, yang dicuplik dari [6], dapat dilihat pada Gambar 1.

Air terserap masuk ke dalam tanah melewati dasar dan dinding sungai menuju daerah perakaran tanaman. Salah satu hal yang penting pada sistem irigasi adalah distribusi air dalam tanah. Permasalahan yang muncul adalah sejauh mana air mampu terserap oleh tanah yang jauh dari sungai. Diketahui bahwa tanah yang terletak dekat dengan sungai lebih banyak mengandung air daripada tanah yang jauh dari sungai.



Gambar 1: Sistem saluran irigasi tunggal

Penelitian tentang masalah infiltrasi pada tanah homogen telah dilakukan oleh beberapa peneliti, di antaranya adalah Aziz dkk [3], Batu [4], Clements dkk [5], Lobo dkk [8], dan Solekhuudin [15]. Aziz dkk meneliti masalah infiltrasi stasioner dari saluran irigasi berkala dengan menggunakan *Boundary Element Methods* (BEM) [3]. Sementara itu, Clement dan Lobo menggunakan BEM untuk meneliti masalah infiltrasi bergantung waktu pada saluran irigasi [5]. Dengan menggunakan BEM juga, Lobo dkk meneliti tentang masalah infiltrasi pada saluran irigasi berlapisan keadap air [8]. Berbeda dengan peneliti-peneliti sebelumnya, Solekhuudin [15] menerapkan *Dual Reciprocity Boundary Element Methods* (DRBEM) pada masalah infiltrasi dari saluran irigasi berkala.

Dalam makalah ini dibahas tentang penyelesaian masalah infiltrasi dari saluran tunggal dengan menggunakan DRBEM. Tujuan penelitian ini diadakan adalah untuk mengetahui distribusi kandungan air dalam tanah di sekitar saluran irigasi tunggal bentuk trapesium. Distribusi kandungan air digambarkan dengan distribusi nilai-nilai potensial fluks matrik atau *matrik flux potensial* (selanjutnya cukup ditulis MFP). Dalam Lobo [9], MFP didefinisikan sebagai tenaga penggerak aliran air. Pada makalah ini akan dibandingkan distribusi nilai MFP dari saluran irigasi tak berlapisan keadap air dengan yang berlapisan keadap air.

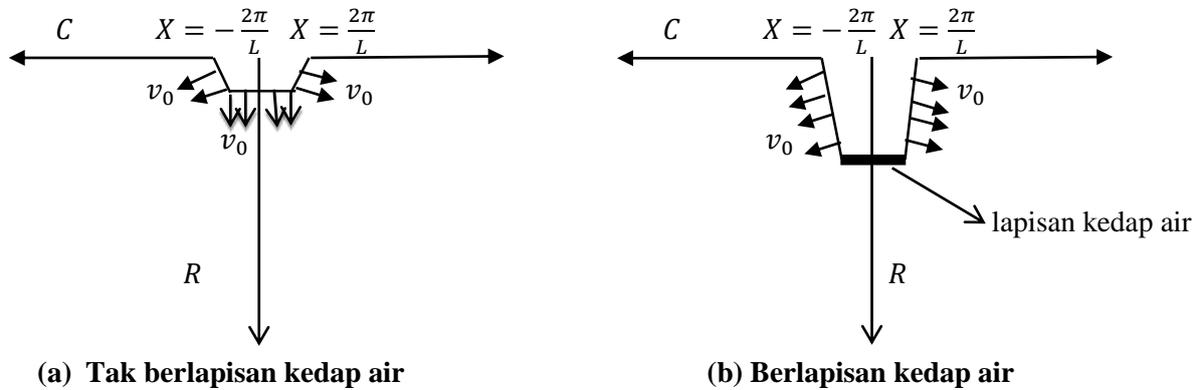
Dengan menyelesaikan model matematika yang diperoleh, informasi mengenai karakteristik penyerapan air dalam tanah di setiap titik lokasi yang dipilih atau diinginkan dapat diperoleh. Ini pada akhirnya dapat membantu teknisi pertanian untuk mengatur sistem irigasi yang optimal untuk mendapatkan hasil yang baik.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian yang didasarkan pada studi literatur dan kajian teoretis. Adapun langkah-langkah penelitiannya adalah sebagai berikut. Yang pertama adalah melakukan studi literatur tentang konsep irigasi dan proses infiltrasi suatu saluran irigasi tunggal. Kemudian dilanjutkan dengan membuat model matematika dari masalah infiltrasi air pada saluran irigasi tunggal yang berupa Persamaan Helmholtz termodifikasi. Langkah berikutnya adalah mengaplikasikan DRBEM pada penyelesaian persamaan pengatur yang terbentuk. Kemudian membentuk domain model dan syarat batas dari saluran irigasi tunggal. Setelah itu, menggunakan program Matlab untuk membantu penyelesaian masalah dalam penelitian ini. Sebagai langkah terakhir adalah menginterpretasikan hasil yang diperoleh dari pemrograman matlab.

Sebagai awal penelitian ini, disusun model matematika masalah infiltrasi dari suatu saluran irigasi berdasarkan asumsi-asumsi berikut, yaitu panjang penampang saluran yang dimasuki fluks (aliran air) adalah $2L$, panjang saluran irigasi dapat diabaikan karena panjang saluran tak hingga panjang sehingga perbandingan antara lebar dan panjangnya sangat kecil, saluran irigasi selalu penuh terisi air, tidak ada pengaruh lain seperti daya serap air oleh akar (*root water uptake*) dan tekanan salinitas air irigasi, tidak ada aliran air yang masuk (infiltrasi) kecuali dari saluran irigasi, dan besar fluks masuk pada permukaan saluran irigasi bernilai konstan, yaitu v_0 .

Didefinisikan domain masalah infiltrasi stasioner dengan $-\infty < X < \infty$ dan $Z \geq 0$ (sumbu Z positif mengarah ke bawah [13, 16, 17]) yang dinyatakan dengan R dengan batas C seperti pada Gambar 2 berikut ini :



Gambar 2. Geometri saluran tunggal bentuk trapesium

3. Hasil Penelitian

Dalam studi masalah infiltrasi stasioner, model matematika yang digunakan adalah persamaan diferensial parsial tak linear

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) - \frac{\partial K(\psi)}{\partial Z} = 0, \tag{1}$$

dengan K adalah konduktivitas hidrolik dan ψ adalah potensial hisap. Persamaan (1) disebut persamaan Richard yang menggambarkan pergerakan air di dalam tanah tak jenuh dua dimensi. Selanjutnya, akan ditentukan solusi dari persamaan (1).

Dengan menggunakan transformasi yang diberikan oleh Kirchhoff [14], didefinisikan MFP sebagai

$$\Theta = \int_{-\infty}^{\psi} K(s) ds, \tag{2}$$

dengan K direpresentasikan dalam hubungan eksponensial [7]

$$K(\psi) = K_0 e^{\alpha \psi}, \quad \alpha > 0 \tag{3}$$

dengan α adalah parameter empirik yang menggambarkan tingkat kekasaran tanah dan K_0 adalah konduktivitas hidrolik tanah jenuh. Persamaan (2) dan (3) mentransformasikan persamaan (1) menjadi persamaan berikut

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} = \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial Z}. \tag{4}$$

Komponen horisontal dan vertikal fluks berturut-turut ditulis sebagai

$$U = -\frac{\partial \Theta}{\partial X}, \tag{5}$$

and

$$V = \alpha \Theta - \frac{\partial \Theta}{\partial Z}. \tag{6}$$

Fluks normal pada permukaan dengan vektor normal satuan $\mathbf{n} = (n_x, n_z)$ diberikan sebagai

$$F = -\frac{\partial\theta}{\partial X}n_x + \left(\alpha\theta - \frac{\partial\theta}{\partial Z}\right)n_z \quad (7)$$

Besar fluks yang masuk melalui saluran adalah v_0 , sedangkan besar fluks pada tanah di luar saluran dan juga pada bagian saluran yang berlapisan kedap air adalah 0. Menurut Batu [4], untuk $X = -\infty$, $X = \infty$ dan $Z = \infty$ diasumsikan $\theta \rightarrow 0$, $\frac{\partial\theta}{\partial X} \rightarrow 0$, dan $\frac{\partial\theta}{\partial Z} \rightarrow 0$. Akibatnya, syarat batas untuk masalah ini adalah

$$F = -v_0, \text{ pada bagian saluran yang tidak berlapisan kedap air,} \quad (8)$$

$$F = 0, \text{ pada bagian saluran yang berlapisan kedap air,} \quad (9)$$

$$F = 0, \text{ pada permukaan tanah di luar saluran,} \quad (10)$$

$$\theta = \frac{\partial\theta}{\partial X} = \frac{\partial\theta}{\partial Z} = 0, \quad X = -\infty \text{ dan } Z \geq 0, \quad (11)$$

$$\theta = \frac{\partial\theta}{\partial X} = \frac{\partial\theta}{\partial Z} = 0, \quad X = \infty \text{ dan } Z \geq 0, \quad (12)$$

dan

$$\theta = \frac{\partial\theta}{\partial X} = \frac{\partial\theta}{\partial Z} = 0, \quad Z = \infty \text{ dan } -\infty \leq X \leq \infty. \quad (13)$$

Dengan menggunakan variabel-variabel tak berdimensi berikut,

$$x = \frac{\alpha}{2}X; \quad z = \frac{\alpha}{2}Z; \quad \Phi = \frac{\pi\theta}{v_0L}; \quad u = \frac{2\pi}{v_0\alpha L}U; \quad v = \frac{2\pi}{v_0\alpha L}V; \quad f = \frac{2\pi}{v_0\alpha L}F, \quad (14)$$

dan menerapkan transformasi

$$\Phi = \phi e^z, \quad (15)$$

pada persamaan (4), diperoleh persamaan diferensial parsial linear berikut,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \phi. \quad (16)$$

Persamaan (16) disebut sebagai persamaan Helmholtz termodifikasi.

Akibatnya, diperoleh syarat batas berikut,

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{2\pi}{\alpha L}e^{-z} + n_z\phi, \text{ pada bagian saluran yang tidak berlapisan kedap air,} \quad (17)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\phi, \text{ pada bagian saluran yang berlapisan kedap air,} \quad (18)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\phi, \text{ pada permukaan tanah di luar saluran,} \quad (19)$$

$$\phi = 0; \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0, \quad x = -\infty \text{ dan } z \geq 0, \quad (20)$$

$$\phi = 0; \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0, \quad x = \infty \text{ dan } z \geq 0, \quad (21)$$

dan

$$\phi = 0; \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0, \quad z = \infty \text{ dan } -\infty \leq x \leq \infty, \quad (22)$$

dengan $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\phi}{\partial x}n_x + \frac{\partial\phi}{\partial z}n_z$ adalah derivatif normal dari ϕ .

Menurut Ang [2], persamaan integral dari persamaan (16) – (22) adalah

$$\lambda(\xi, \eta)\phi(\xi, \eta) = \int_C \left\{ \phi(x, z) \frac{\partial}{\partial n} [\varphi(x, z; \xi, \eta)] - \varphi(x, z; \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} [\phi(x, z)] \right\} ds(x, z)$$

$$+ \iint_R \varphi(x, z; \xi, \eta) \phi(x, z) dx dz, \quad (23)$$

dengan

$$\lambda(\xi, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{jika } (\xi, \eta) \text{ terletak pada bagian } \textit{smooth} C \\ 1, & \text{jika } (\xi, \eta) \in R \end{cases} \quad (24)$$

dan

$$\varphi(x, z; \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln((x - \xi)^2 + (z - \eta)^2). \quad (25)$$

Persamaan (25) adalah solusi fundamental persamaan Laplace.

Persamaan (23) tidak dapat dipecahkan secara analitik. Oleh karena itu, dibutuhkan suatu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan integral tersebut. Dalam makalah ini, metode yang digunakan adalah DRBEM. Pembaca dapat merujuk ke [2, 12] untuk mengetahui lebih detail metode tersebut.

Untuk menerapkan DRBEM, domain harus dibatasi oleh suatu kurva tertutup sederhana. Karena itu, batas-batas yang dipaksakan (*imposed boundary*) akan diberlakukan untuk menggantikan $-\infty \leq x \leq \infty$ dan $z = \infty$ masing-masing menjadi $-b \leq x \leq b$ dan $z = c$. Dalam penelitian ini, dipilih nilai b dan c masing-masing adalah 10.

Sebagaimana penelitian kami sebelumnya [10], tipe tanah yang menjadi objek penelitian ini adalah *Pima Clay Loam* (PCL) yang mempunyai tingkat kekasaran tanah $\alpha = 0,014 \text{ cm}^{-1}$ [1].

Untuk tujuan perbandingan, panjang penampang melintang yang dimasuki fluks dari kedua saluran irigasi tunggal bentuk trapesium dibuat sama, yaitu $2L = 200 \text{ cm}$. Dengan menggunakan nilai $2L$ tersebut, ditentukan lebar kedua saluran tersebut adalah $\frac{400}{\pi} \text{ cm}$. Adapun kedalaman kedua saluran tersebut adalah $\frac{150}{\pi} \text{ cm}$ dan $\frac{300}{\pi} \text{ cm}$ berturut-turut untuk saluran irigasi tak berlapisan kedap air dan berlapisan kedap air.

Untuk saluran tak berlapisan kedap air, ditetapkan $N = 800$ dan $M = 625$, dan untuk yang berlapisan kedap air, N dan M adalah 800 dan 624. Perbedaan kecil dalam nilai N dan M muncul akibat perbedaan kedalaman saluran.

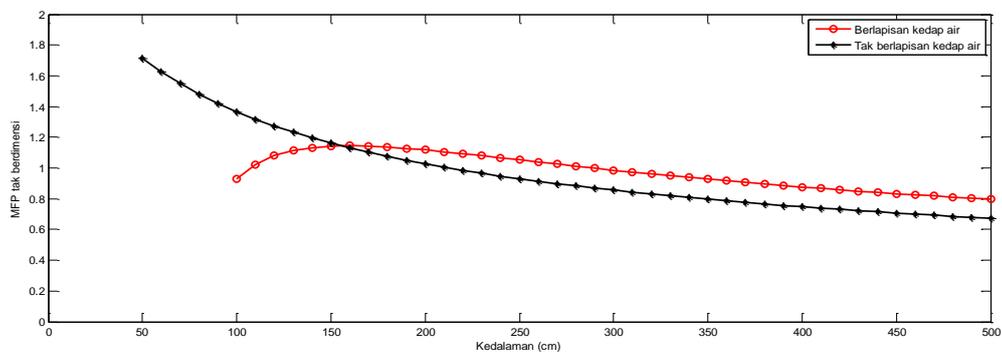
Variasi nilai MFP tak-berdimensi terhadap kedalaman (Z) dapat dilihat pada Gambar 3 untuk kedalaman 0 sampai 500 cm. Gambar 3a menjelaskan distribusi nilai MFP di titik-titik bawah dasar saluran, yakni diambil $X = 30 \text{ cm}$. Untuk saluran tak berlapisan kedap air, nilai MFP berkurang seiring bertambahnya kedalaman titik-titik di dalam tanah. Ini menunjukkan bahwa kandungan air pada tingkat tanah yang dangkal lebih tinggi daripada bagian yang lebih dalam. Sedangkan untuk saluran berlapisan kedap air, mula-mula nilai MFP atau kandungan air akan naik seiring bertambahnya Z hingga kemudian nilainya akan menurun. Hal ini disebabkan karena tidak adanya fluks yang masuk melalui lapisan kedap air. Mulai kedalaman tertentu nilai MFP di titik-titik bawah saluran berlapisan kedap air akan lebih tinggi daripada yang di bawah saluran tak berlapisan kedap air. Ini mudah dipahami karena sumber aliran air (fluks) saluran berlapisan kedap air lebih dalam daripada saluran tak berlapisan kedap air.

Gambar 3b memperlihatkan distribusi nilai MFP di $X = 70 \text{ cm}$, yaitu titik-titik di dekat kedua saluran. Sedangkan Gambar 3c memperlihatkan distribusi nilai MFP di $X = 110 \text{ cm}$, yaitu titik-titik yang cukup jauh dari kedua saluran. Kedua gambar mengilustrasikan hal yang sama. Mula-mula nilai MFP akan naik seiring bertambahnya Z hingga kemudian nilainya akan menurun. Hal ini sesuai dengan kondisi awal yang diberikan bahwa tidak ada aliran air yang

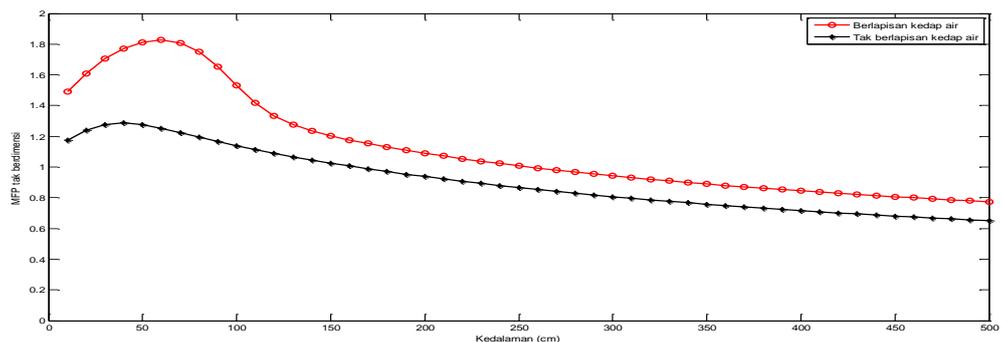
melewati permukaan tanah. Nilai MFP di titik-titik vertikal samping saluran berlapisan kedap air lebih tinggi daripada yang di bawah saluran tak berlapisan kedap air. Ini mudah dipahami karena dinding penampang saluran berlapisan kedap air lebih panjang daripada penampang saluran tak berlapisan kedap air sehingga sumber aliran airnya lebih banyak.

Sementara itu, Gambar 3d memperlihatkan distribusi nilai MFP di $X = 500$ cm, yaitu titik-titik yang jauh dari kedua saluran. Terlihat bahwa nilai MFP naik sampai kedalaman 500 cm. Penjelasan penyebab nilai MFP di titik-titik vertikal samping saluran berlapisan kedap air lebih tinggi daripada yang di bawah saluran tak berlapisan kedap air sama dengan penjelasan Gambar 3b dan 3c.

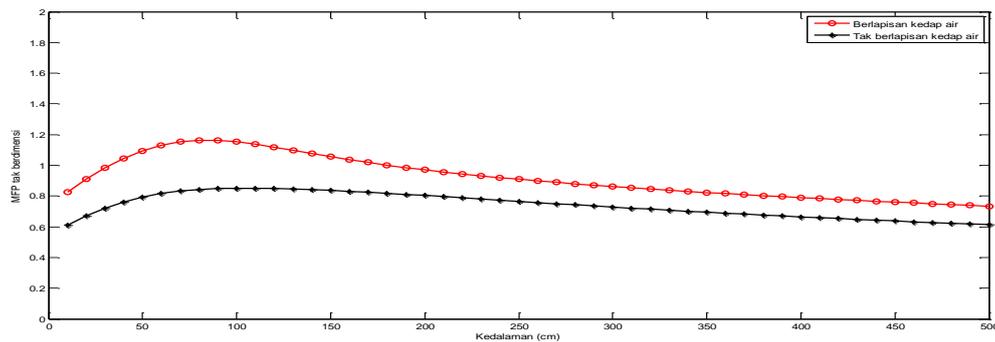
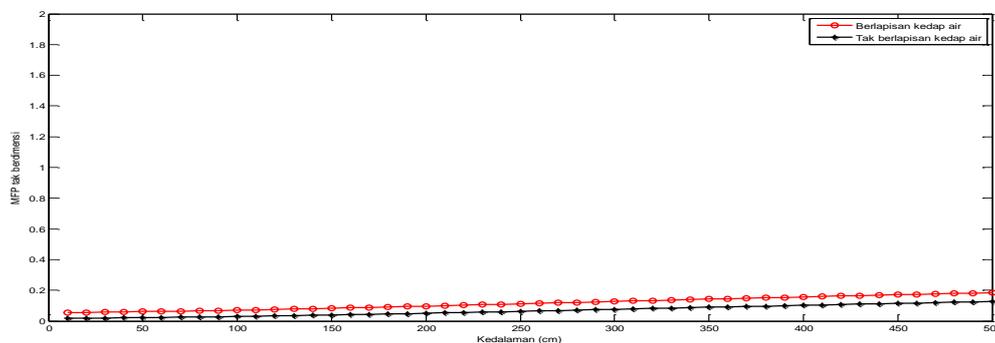
Dari keempat gambar terlihat bahwa semakin jauh dari saluran, maka perbedaan nilai MFP antara saluran berlapisan kedap air dan yang tidak berlapisan kedap air akan semakin kecil.



a. Di sepanjang $X = 30$ cm



b. Di sepanjang $X = 70$ cm

c. Di sepanjang $X = 110$ cmd. Di sepanjang $X = 500$ cm**Gambar 3. Distribusi nilai MFP di sepanjang titik-titik vertikal**

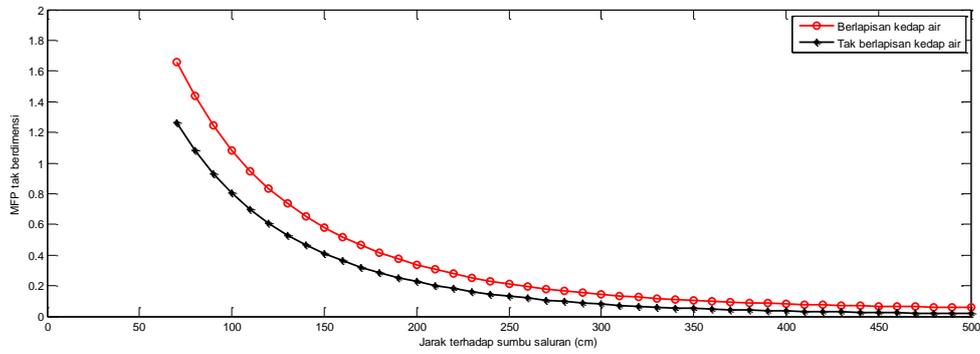
Berikutnya dibahas tentang distribusi nilai MFP dengan diambil titik-titik di dalam tanah sepanjang arah horisontal sampai sejauh 500 cm. Variasi nilai MFP tak-berdimensi pada kedalaman 25 cm dapat dilihat pada Gambar 4a. Dari gambar terlihat bahwa nilai MFP titik-titik pada kedalaman tersebut berkurang seiring bertambah jauhnya titik-titik tersebut dari dinding saluran. Ini menunjukkan bahwa kandungan air pada tingkat tanah yang dekat dengan dinding saluran lebih tinggi daripada bagian yang lebih jauh. Nilai MFP dari saluran berlapisan kedap air lebih tinggi karena mempunyai dinding saluran yang lebih lebar daripada saluran tak berlapisan kedap air sehingga sumber aliran airnya pun lebih banyak.

Gambar 4b memperlihatkan titik-titik pada kedalaman 75 cm. Sebagaimana pembahasan distribusi nilai MFP pada kedalaman 25 cm, terlihat bahwa nilai MFP titik-titik pada kedalaman tersebut berkurang seiring bertambah jauhnya titik-titik tersebut dari dinding saluran. Ini menunjukkan bahwa kandungan air pada tingkat tanah yang dekat dengan dinding saluran lebih tinggi daripada bagian yang lebih jauh. Hanya saja nilai MFP dari saluran berlapisan kedap air lebih tinggi lebih disebabkan karena mempunyai sumber aliran air (fluks) yang lebih dalam daripada saluran tak berlapisan kedap air.

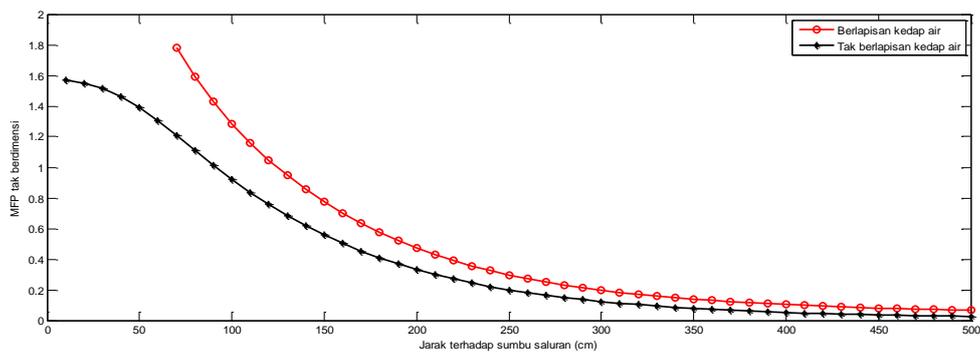
Gambar 4c memperlihatkan titik-titik pada kedalaman 300 cm. Seperti pada pembahasan sebelumnya, terlihat bahwa nilai MFP titik-titik pada kedalaman tersebut berkurang seiring bertambah jauhnya titik-titik tersebut dari sumber aliran air (fluks). Ini menunjukkan bahwa kandungan air pada tingkat tanah yang dekat dengan sumber aliran air (fluks) lebih tinggi daripada bagian yang lebih jauh. Nilai MFP dari saluran berlapisan kedap air lebih tinggi lebih

disebabkan karena mempunyai sumber aliran air yang lebih dalam daripada saluran tak berlapisan kedap air.

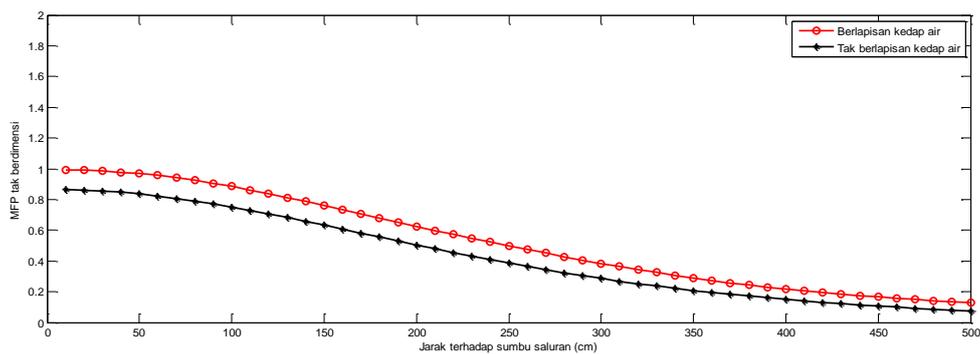
Dari ketiga gambar terlihat bahwa semakin jauh dari saluran, maka perbedaan nilai MFP antara saluran berlapisan kedap air dan yang tidak berlapisan kedap air akan semakin kecil.



a. Di sepanjang Z = 25 cm



b. Di sepanjang Z = 75 cm



c. Di sepanjang Z = 300 cm

Gambar 4 Distribusi nilai MFP di sepanjang titik-titik horisontal

4. Simpulan

- a. DRBEM dapat menyelesaikan model matematika masalah infiltrasi saluran irigasi alur di dalam tanah homogen yang berbentuk masalah syarat batas dengan persamaan pengaturannya adalah persamaan Helmholtz termodifikasi dan syarat batasnya adalah syarat batas campuran.
- b. Untuk titik-titik di bawah dasar saluran yang berlapisan kedap air dan di bawah permukaan tanah di sebelah saluran, kandungan air akan mengalami kenaikan seiring bertambahnya kedalaman dan pada titik tertentu kandungan air akan mengalami penurunan.
- c. Semakin jauh dari saluran, maka kandungan air semakin kecil dan perbedaannya semakin tidak signifikan antara saluran berlapisan kedap air dan tak berlapisan kedap air.

5. Saran

- a. Penelitian ini menggunakan jenis tanah homogen, padahal pada kenyataannya tanah terdiri atas beberapa tekstur yang berbeda pada lapisan-lapisan tertentu. Oleh karena itu, dalam pengembangannya dapat dilakukan penelitian dengan menggunakan jenis tanah heterogen.
- b. Nilai fluks yang masuk pada permukaan saluran dalam penelitian ini diasumsikan bernilai konstan. Oleh karena itu, selanjutnya dapat dilakukan penelitian berupa permasalahan infiltrasi dengan fluks tak konstan pada permukaan saluran.

6. Daftar Pustaka

- [1] A. Amoozegar-Fard, A.W. Warric, and D. O. Lomen, 1984, *Design Nomographs for Trickle Irrigation System*, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 110, 107 - 120.
- [2] W. T. Ang, *A Beginer's Course in Boundary Element Method*, 2007, Universal Publishers Boca Raton, Florida.
- [3] M. I. Azis, D. L. Clements, and M. Lobo, 2003, *A Boundary Element Method for Steady Infiltration from Periodic Channels*, ANZIAM J. 44, C61–C78;
- [4] V. Batu, *Steady Infiltration from Single and Periodic Strip Sources*, 1978, Soil. Sci. Soc. Am. J. 42, 544-549.
- [5] D. L. Clements, and M. Lobo, 2010, *A BEM for Time Dependent Infiltration from an Irrigation Channel*, Engineering Analysis with Boundary Elements 34, 1100-1104.
- [6] Desa Kandungan Tucuk Bojonegoro. *Pembuatan Saluran Air untuk Pertanian Terus Ditingkatkan*, 22 Maret 2018
<http://kandungan-bjn-.desa.id/2017/12/pembuatan-saluran-air-untuk-pertanian.html>
- [7] W. R. Gardner, *Some Steady State Solutions of the Unsaturated Moisture Flow Equation with Application to Evaporation from a Water Table*, Soil Sci., 85 (1958), 228 - 232.
- [8] M. Lobo, D. L. Clements, and N. Widana, 2005, *Infiltration from Irrigation Channels in a Soil with Impermeable Inclusions*, ANZIAM J. 46, C1055–C1068.
- [9] M. Lobo, 2008, *Boundary Element Methods for the Solution of a Class of Ifiltration Problems*, Faculty of Engineering, Computer and Mathematical Sciences, University of Adelaide, Doctor Dissertation.
- [10] Munadi, I. Solekhudin, Sumardi, A. Zulijanto, 2017, *A Dual Reciprocity Boundary Element Method for Water Infiltration Problems in a Single Flat and Trapezoidal Irrigation Channels*, Proceedings of 1st Ahmad Dahlan International Conference on Mathematics and Mathematics Education Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta, 13-14 October 2017

- [11] P. Nuchsin, 2014, *Pedoman Teknis Pengembangan Sumber Air*, Direktorat Jenderal Sarana dan Prasarana Pertanian, Kementerian Pertanian.
- [12] P. W. Partridge, C. A. Brebbia and L. C. Wrobel, 1992, *The dual reciprocity boundary element method*, Comput. Mech., Southampton, and Elsevier Appl. Sci., London.
- [13] A. J. Pullan, 1992, *Linearized Time-Dependent Infiltration from a Shallow Pond*, Water Resour. Res. 28, 1041–1046.
- [14] P. A. C. Raats, 1970, *Steady Infiltration from Sources and Furrows*, Soil Science Society of America Journal, 34(5): 709 - 714.
doi:10.2136/sssaj1970.03615995003400050015x.
- [15] I. Solekudin, 2013, *A Dual Reciprocity Boundary Element Method for Steady Infiltration Problems*. Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics Journal (ANZIAM), 54, 171-180.
- [16] R. T. Waechter, and A. C. Mandal, 1993, *Steady Infiltration from a Semicircular Cylindrical Trench and a Hemispherical Pond into Unsaturated Soil*, Water Resour. Res. 29, 457–467.
- [17] R. T. Waechter, and J. R. Philip, 1985, *Steady Two-and Three-Dimensional flows in Unsaturated Soil: The Scattering Analog*, Water Resour. Res. 21, 1875–1887.

Ucapan terima kasih

Penulis mengapresiasi dan menyampaikan terima kasih tak terhingga atas bantuan dan dorongan semangat dari kolega dan para pembimbing sehingga penulisan makalah ini bisa berjalan lancar dan tuntas.