 ISSN: 2407-7496

Kemaksimalan Kode Cross Bifix Bebas

Moh. Affaf
STKIP PGRI Bangkalan

Abstrak. Studi tentang kode cross bifix bebas muncul dari permasalahan barisan terdistribusi untuk sinkronisasi frame pada Gaussian Channel di tahun 2000. Suatu kode cross bifix bebas dengan panjang n adalah himpunan barisan dengan panjang n dimana prefix dengan panjang kurang dari n dari suatu barisan tidak muncul sebagai suffix dari barisan yang lain. Pada tahun 2012, untuk panjang n lebih dari atau sama dengan 2, Stefano Bilotta mengkonstruksi kode cross bifix bebas biner dengan panjang n dengan memanfaatkan Lintasan Dyck. Konstruksi Bilotta untuk kode biner ini mencapai salah satu target utama dari kode cross bifix bebas biner, yaitu kemaksimalan. Artinya, konstruksi Bilotta tak dapat diperluas di himpunan semua barisan biner dengan panjang yang sama. Kemudian, pada tahun 2013 Chee mengkonstruksi kode cross bifix bebas untuk sebarang simbol yang dia klaim mendekati kode optimal ynag bergantung pada parameter k. Pada tahun 2015 Blackburn memperumum konstruksi yang dihasilkan Chee dan mencapai kode optimal saat panjang kode membagi banyaknya simbol yang diberi judul Non-overlapping Codes. Baru-baru ini, yaitu pada tahun 2017, Affaf memperluas kode cross bifix bebas biner milik Bilotta menjadi kode cross bifix bebas terner. Dalam paper ini, akan dibahas tentang kemaksimalan kode cross bifix bebas terner.

Kata kunci: Bifix Bebas, Kode Cross Bifix Bibifix Bebas, Kode Cross Bifix Bebas, Non-overlapping, Sinkronisasi Frame.

1. Pendahuluan

Dalam sistem komunikasi, pada pengiriman data yang berkesinambungan, untuk menjamin adanya keselarasan di antara *transmitter* dan *receiver* pada frame data yang dipancarkan, disisipkan *kata penyelaras* secara periodik ke dalam aliran data. Karena data dipancarkan secara berulang-ulang, receiver perlu mengetahui kapan aliran data dimulai. Dalam hal ini, kata penyelaras berperan sebagai penanda pada frame yang mana data dimulai dan permulaan dari pesan yang dikirimkan. *Frame Synchronization*

Metode sinkronisasi frame ini tidak hanya berguna dalam sistem komunikasi. Dalam disertasinya, Weindl [1] berhasil menunjukkan bahwa metode sinkronisasi dapat digunakan untuk memodelkan *gene expression,* yaitu sistesis protein. Serupa dengan kata penyelaras, alam menggunakan suatu barisan tertentu untuk menandai dimulainya wilayah DNA yang fundamental. Analogi ini memungkinkan penggunaan teknik pada sinkronisasi frame dengan menggunakan simulasi pada *genome* yang telah tersedia.

Dalam teknik sinkronisasi, receiver dilengkapi dengan alat pendeteksi pola untuk dapat mengenali kata penyelaras. Massey [2] menjelaskan suatu prosedur yang optimal untuk mencari kata penyelaras dalam suatu aliran data pada *Gaussian Channel*. Massey menyadari bahwa prosedur pencarian ditentukan oleh bentuk kata penyelaras yang dipilih meskipun dalam analisisnya dia tidak meninjau hal tersebut. Setahun kemudian, yakni di tahun 1973, Nielsen [3] menunjukkan bahwa ekspektasi dari pencarian kata penyelaras dapat diminimumkan jika kata penyelaras yang diambil memiliki sifat *bebas* *imbuhan* (bifix free). Ini merupakan paper pertama dimana terminologi Bifix Free diperkenalkan. Suatu kata **p** dikatakan bebas imbuhan jika tidak ada akhiran sejati dari **p** yang muncul sebagai awalan dari **p**.

Mengingat potensi praktikal dari himpunan/kode cross bifix bebas, beberapa peneliti mengusulkan beberapa cara untuk mengontruksi himpunan tersebut. Pertama, Bilotta [4] memperkenalkan kontruksi kode cross bifix bebas dengan panjang sebarang. Kemudian, Bajic dan Loncar [5] mengkontruksi kode cross bifix bebas dengan menggunakan metode yang mereka sebut *Kernel Set*. Kode yang dihasilkan Bajic maupun Bilotta, keduanya adalah kode biner, yaitu kode dengan 2 simbol.

Kontruksi kode cross bifix bebas dengan menggunakan *alphabet* yang mempunyai q simbol diperkenalkan pertama kali di tahun 2013 oleh Chee [6]. Chee menamakan konstruksinya sebagai Kode $S_{k,q}(n)$, yaitu kode dengan q simbol dimana k menyatakan banyaknya simbol nol yang muncul pada awalan dengan panjang n pada setiap katakode. Chee mengklaim bahwa kode yang dikonstruksinya mendekati kode optimal $C(n,q)$. Sayangnya keoptimalan kode Chee bergantung kepada parameter k. Tidak diketahui dengan pasti untuk panjang kode n tertentu berapa nilai k yang membuat $S_{k,q}(n)$ optimal. Setahun kemudian, yaitu pada tahun 2015, Blackburn mengamati bahwa kode yang dihasilkan Chee memiliki sifat yang baik hanya saat q simbol yang cukup kecil. Untuk mengatasi kelemahan tersebut, Blackburn mengajukan metoda baru yang merupakan perumuman dari metoda Chee yang mempunyai sifat yang baik untuk setiap parameter [7]. Blackburn mengklaim bahwa kode yang dihasilkannya optimal saat panjang katakodenya, yaitu n, membagi banyaknya simbol, yaitu q.

Selanjutnya, pada tahun 2017, Affaf [8] berhasil mengkonstruksi Kode Cross Bifix Bebas Terner berpanjang ganjil, yaitu $CBFS_3(2m + 1)$. Selain itu, di tahun yang sama, Kode Cross Bifix Bebas Terner berpanjang genap, yaitu $CBFS_3(2m + 2)$ [9], juga berhasil dikonstruksi. Kedua kode ini dikonstruksi dengan cara memanfaatkan konstruksi Kode Cross Bifix Bebas Binari yang memanfaatkan Lintasan Dyck. Dalam penelitiannya tersebut, Affaf belum memberikan klaim apakah kode yang ia hasilkan mencapai maksimal atau tidak.

2. Metodelogi Penelitian

Pada bagian ini, akan dijelaskan tentang metode-metode konstruksi-konstruksi yang dihasilkan para peneliti terdahulu. Untuk konstruksi Bilotta, akan dijelaskan bagaimana didapatkannya $CBFS_2(n)$. Konstruksi ini diklaim mencapai kemaksimalan, yaitu *non-expandable* di $H_2(n)$ yang artinya untuk setiap anggota h di $H_2(n)$ dan bukan di $CBFS_2(n)$, himpunan $CBFS_2(n) \cup \{h\}$ bukan lagi Kode Cross Bifix Bebas. Selain konstruksi $CBFS_2(n)$, akan dijelaskan pula metode yang dilakukan pada kosntruksi $CBFS_3(2m+1)$ and $CBFS_3(2m+2)$ yang juga diklaim sebagai Kode Cross Bifix Bebas.

2.1. Kode Cross Bifix Bebas $CBFS_2(n)$

Bilotta membagi kode yang dikonstruksinya menjadi tiga bagian, yaitu untuk panjang kode ganjil, panjang kode ganjil dengan parameter genap, dan panjang kode genap dengan parameter ganjil. Kode Cross Bifix Bebas dengan panjang ganjil, didefinisiakan sebagai $CBFS_2(2m+1)$, yaitu

$$CBFS_2(2m+1) = \{x\alpha : \alpha \in D_{2m}\},$$

adalah himpunan lintasan dengan panjang $2m+1$ diawali langkah naik dan kemudian diteruskan dengan Lintasan Dyck berpanjang $2m$. Selanjutnya, Kode Cross Bifix Bebas dengan panjang genap dengan m genap, didefinisiakan sebagai $CBFS_2(2m+2)$, yaitu

$$CBFS_2(2m+2) = \left\{\alpha x\beta\overline{x} : \alpha \in D_{2(m-i)}, 0 \le i \le \frac{m}{2}\right\},$$

adalah himpunan lintasan dengan panjang $2m$+2 yang diawali dengan lintasan Dyck dengan panjang $2i$, diikuti dengan langkah naik, lalu dilanjutkan dengan lintasan Dyck dengan panjang $2(m-i)$, kemudian diakhiri dengan langkah turun. Terakhir, Kode Cross Bifix Bebas dengan panjang genap dengan m ganjil, didefinisiakan sebagai $CBFS_2(2m+2)$, yaitu

$$CBFS_2(2m+2) = \left\{\alpha x\beta\overline{x} : \alpha \in D_{2i}, \beta \in D_{2(m-i)}, 0 \le i \le \frac{m+1}{2}\right\} \backslash \{x\theta\overline{x}x\gamma\overline{x} : \alpha, \beta \in D_{m-1}\},$$

adalah himpunan lintasan dengan panjang $2m$+2 yang diawali dengan lintasan Dyck dengan panjang $2i$, diikuti dengan langkah naik, lalu dilanjutkan dengan lintasan Dyck dengan panjang $2(m-i)$, kemudian diakhiri dengan langkah turun; setelah semua lintasan ini terkumpul, maka Bilotta membuang semua lintasan yang diawali dengan langkah naik yang dilanjutkan dengan lintasan Dyck dengan panjang $m-1$, diikuti dengan langkah turun, lalu diikuti langkah naik, lalu dilanjutkan dengan lintasan Dyck dengan panjang $m-1$, kemudian diakhiri dengan langkah turun.

Dari ketiga kontruksi yang dilakukannya, Bilotta mendapatkan ahsil sebagai berikut.
Teorema 2.1.1. Himpunan $CBFS_2(n)$ adalah Kode Cross Bifix Bebas yang tak dapat diperluas di $H_2(n)$, yaitu himpunan barisa biner dengan panjang n.

2.2. Kode Cross Bifix Bebas $CBFS_3(n)$

Affaf mengkonstruksi $CBFS_3(2m+1)$ dan $CBFS_3(2m+2)$ dengan memanfaatkan konstruksi $CBFS_2(2m+1)$ dan $CBFS_2(2m+2)$. Untuk $CBFS_3(2m+1)$, Affaf mengkonstruksinya sebagai berikut.
Konstruksi 2.2.1. Misalkan $CBFS_2(2m+1)$ adalah Kode Cross Bifix Bebas dengan panjang ganjil hasil konstruksi Bilotta. Perluasan $CBFS_2(2m+1)$ menjadi$CBFS_3(2m+1)$ adalah sebagai berikut.
i) Semua anggota $CBFS_2(2m+1)$ dijadikan anggota $CBFS_3(2m+1)$.
ii) Semua anggota $H_3(2m+1)$ yang dapat diperoleh dari anggota $CBFS_2(2m+1)$ dengan cara mengganti 0 dengan 2, juga dijadikan anggota $CBFS_3(2m+1)$.

Dari konstruksi ini, didapatkan hasil sebagai berikut.
Teorema 2.2.2. Himpunan $CBFS_3(2m+1)$ adalah Himpunan/Kode Cross Bifix Bebas berkardinalitas $2^{m+1}C_m$ dengan C_m adalah Bilangan Catalan ke-m.

Untuk $CBFS_3(2m+2)$, Affaf mengkonstruksinya sebagai berikut.
Konstruksi 2.2.3. Misalkan $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3 \dots \omega_{2m+2}$anggota $CBFS_2(2m+2)$. Selanjutnya, definisikan $0_\omega = \{i \in \{1,2,3,\dots,2m+2\}: \omega_i = 0\}$ yaitu himpunan semua posisi di ω yang bersimbol 0. Himpunan terner $CBFS_3(2m+2)$ didefinisikan sebagai

$$CBFS_3(2m+2) = \bigcup_{\omega \in CBFS_2(2m+2)} C_{\omega,3}^{2m+2}$$

dengan

$$C_{\omega,3}^{2m+2} = \left\{c \in H_3(2m+2): i \in \omega \Rightarrow 2|c_i, i \in \{0,1,2\}\right\}$$

Dari konstruksi ini, didapatkan hasil sebagai berikut.
Teorema 2.2.4. Himpunan $CBFS_3(2m+2)$ adalah Himpunan/Kode Cross Bifix Bebas berkardinalitas $2^m \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} C_m C_{m-i}$ untuk m genap dan berkardinalitas $2^m \left(\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} C_i C_{m-i} - C_{\frac{m-1}{2}}^2\right)$ untuk m ganjil.

3. Hasil Penelitian

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, hasil pada [8] dan [9] masih sebatas mengklaim bahwa $CBFS_3(2m+1)$ dan $CBFS_3(2m+2)$ sebagai Kode Cross Bifix Bebas Terner. Namun, belum dipastikan apakah kode-kode tersebut mencapai maksimal. Pada bagian ini, akan ditunjukkan bahwa $CBFS_3(2m+1)$ dan $CBFS_3(2m+2)$ mendekati kemaksimalan. Misalkan $\mathbb{C}(n,3)$ menyatakan kardinalitas optimal dari Kode Cross Bifix Bebas Terner dan $|CBFS_3(n)|$ menyatakan kardinalitas dari Kode Cross Bifix Bebas Terner $CBFS_3(n)$, maka

$$\frac{\mathbb{C}(n,3)}{|CBFS_3(n)|} \approx \frac{\frac{3^n}{2n-1}}{2^n C_m}$$

Namun, berdasarkan [6], kita dapatkan $C_m \approx \frac{2^{2^m}}{(m+1)\sqrt{m\pi}}$, sehingga kita peroleh

$$\frac{\mathbb{C}(n,3)}{|CBFS_3(n)|} \approx \frac{\frac{3^n}{2n-1}}{2^n \frac{2^{2^m}}{(m+1)\sqrt{m\pi}}}$$

yaitu

$$\frac{\mathbb{C}(n,3)}{|CBFS_3(n)|} \approx \frac{2(m+1)\sqrt{m\pi}}{2m+1}$$

Dari sini, terlihat bahwa $|CBFS_3(n)|$ cukup dekat kardinalitas optimal sehingga $|CBFS_3(n)|$ sangat mungkin untuk mecapai maksimal.
Teorema 3.1. Untuk $n = 2$, $|CBFS_3(n)|$ optimal.
Bukti. Berdasarkan [7], kita ketahui bahwa $\mathbb{C}(n,3) = \lfloor 3/2 \rfloor \lceil 3/2 \rceil$ dan dari [8] kita dapatkan $|CBFS_3(n)| = 2^{m+1}$. Oleh karenanya, kita dapatkan $\mathbb{C}(n,3) = |CBFS_3(n)|$. Jadi, $|CBFS_3(n)|$ optimal.

4. Kesimpulan dan Saran

Dari hasil di atas, dapat disimpulkan bahwa $|CBFS_3(n)|$ cukup dekat dengan kardinalitas optimal sehingga sangat mungkin untuk mencapai maksimal. Selanjutnya, untuk $n = 2$, kita dapatkan fakta bahwa $|CBFS_3(n)|$ mencapai optimal.

Dari kesimpulan ini, baru bisa ditunjukkan bahwa untuk n yang cukup kecil saja sangat dekat dengan kardinalitas optimal. Jadi, masih perlu dilakukan observasi lebih jauh lagi apakah $|CBFS_3(n)|$ akan bener-benar mencapai maksimal untuk n yang cukup besar.

5. Daftar Pustaka

[1] Johanna Weindl. Frame synchronization processes in gene expression. Verlag Dr. Hut, 2008.
[2] James L Massey. Optimum frame synchronization. Communications, IEEE Transactions on, 20(2):115.
[3] Peter Tolstrup Nielsen. On the expected duration of a search for a _xed pattern in random data. IEEE Transactions on Information Theory, 19(5):702.
[4] Bilotta, S., Pergola, E., & Pinzani, R. (2012). A new approach to cross-bifix-free sets. *IEEE Transactions on Information Theory*, *58*(6), 4058-4063.
[5] Bajic, D., & Loncar-Turukalo, T. (2014). A simple suboptimal construction of cross-bifix-free codes. *Cryptography and Communications*, *6*(1), 27-37.
[6] Chee, Y. M., Kiah, H. M., Purkayastha, P., & Wang, C. (2013). Cross-bifix-free codes within a constant factor of optimality. *IEEE Transactions on Information Theory*, *59*(7), 4668-4674.
[7] Blackburn, S. R. (2015). Non-overlapping codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, *61*(9), 4890-4894.
[8] Affaf, M., & Ulum, Z. (2017, July). Konstruksi Kode Cross Bifix Bebas Ternair untuk Panjang Ganjil. In *Prosiding SI MaNIs (Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai-Nilai Islami)*(Vol. 1, No. 1, pp. 1-5).
[9] Affaf, M., & Ulum, Z. (2017). KONSTRUKSI KODE CROSS BIFIX BEBAS TERNARI BERPANJANG GENAP UNTUK MENGATASI MASALAH SINKRONISASI FRAME. *JIKO (Jurnal Informatika dan Komputer)*, *2*(2), 109-116.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan syukur kepada Allah SWT, *Alhamdulillaahi Robbil 'Aalamiiin*. Selanjutnya, Penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada LPPM STKIP PGRI Bangkalan atas bantuan dana yang diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian ini dengan baik. Terakhir, Penulis juga mengucapkan banyak terima kasih kepada Kedua orang tua, kakak, adik, istri, beserta seluruh keluarga dan rekan-rekan penulis yang turut membantu terselesaikannya penelitian ini.