Fungsi Semisederhana dan Sifat-sifatnya

Prasanti Mia Purnama[1], Firdaus Ubaidillah[2], Kristiana Wijaya[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember, Indonesia

Abstract. Fungsi semisederhana bernilai real didefinisikan sebagai fungsi yang mempunyai range terhitung. Dalam tulisan ini akan dibahas mengenai sifat-sifat sederhana fungsi semisederhana. Lebih jauh, juga dibahas mengenai ruang koleksi fungsi semisederhana atas field real.

Keyword. Fungsi semisederhana, himpunan terhitung, ruang fungsi.

1. Pendahuluan

Fungsi merupakan salah satu kajian penting dalam bidang matematika. Banyak ilmuwan mengklasifikasikan fungsi kemudian menggali sifat-sifatnya untuk menganalisa sesuatu. Beberapa klas fungsi yang sudah sering ditemui diantaranya fungsi kontinu, fungsi Lipschitz, fungsi tangga, fungsi terukur, fungsi terbatas, fungsi monoton, fungsi terdiferensial, fungsi terintegral, fungsi sederhana, dan sebagainya. Dengan mengetahui sifat-sifat suatu klas fungsi, beberapa hal lain bisa diketahui dan digali informasinya. Sebagai contoh, Bartle dan Sherbert [1] telah mengklasifikasikan fungsi terintegral Riemann diantaranya klas fungsi kontinu, fungsi tangga, dan fungsi monoton. Kemudian, Royden dan Fitzpatrick [2] telah mengklasifikasikan fungsi terintegral Lebesgue diantaranya fungsi terbatas dan terintegral Riemann serta fungsi terbatas dan terukur.

Dalam banyak referensi telah dibahas bahwa fungsi karakteristik dan fungsi tangga, keduanya merupakan fungsi sederhana. Setiap fungsi sederhana dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear berhingga fungsi-fungsi karakteristik. Suatu fungsi sederhana belum tentu merupakan fungsi tangga. Menurut [2], setiap fungsi sederhana yang terdefinisi pada selang tertutup dan terbatas maka terintegral Lebesgue.

Salah satu klasifikasi fungsi yang lain adalah fungsi semisederhana, dimana fungsi ini merupakan generalisasi dari fungsi sederhana, yakni setiap fungsi sederhana merupakan fungsi semisederhana. Dari hasil penelitian-penelitian yang telah dibahas di atas, tujuan utama paper ini adalah menggali sifat-sifat sederhana fungsi semisederhana yang dituangkan dalam teorema-teorema. Lebih jauh, mengetahui karakteristik ruang fungsi semisederhana.

Himpunan Terhitung dan Sifat-sifatnya

Pada bagian ini diberikan definisi himpunan terhitung, kardinalitas dan beberapa sifat dari himpunan terhitung yang dituangkan dalam teorema-teorema. Bukti-bukti teorema dapat dilihat di [1], [4] dan [5].

Definisi 1. Diberikan himpunan $S \subseteq \mathbb{R}$. Himpunan S dikatakan terhitung (*countable*) jika S berhingga atau terdapat fungsi bijektif $f: \mathbb{N} \to S$, dan dikatakan tak terhitung (*uncountable*) jika tidak demikian.

Definisi 2.
(i). Kardinalitas dari himpunan berhingga S adalah banyaknya elemen dari S, dinotasikan $|S|$.
(ii). Kardinalitas dari $\mathbb{N}$ adalah $\aleph_0$, sehingga $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.
(iii). Sebarang himpunan dengan kardinalitas $\aleph_0$ disebut himpunan terhitung tak hingga.

Teorema 3. Diberikan dua himpunan bilangan real T dan S dengan $T \subseteq S$.
(i). Jika S terhitung, maka T terhitung.
(ii). Jika T tak terhitung, maka S tak terhitung.

Teorema 4. Himpunan semua bilangan rasional di $\mathbb{R}$ terhitung.

Teorema 5. Gabungan terhitung dari himpunan terhitung adalah terhitung.

Teorema 6. Sebuah interval *nondegenerate* dari bilangan real adalah tak terhitung.

Sebuah interval dari bilangan real disebut *degenerate* jika merupakan himpunan kosong atau singleton.

StrukturAljabar dan Ruang Vektor

Pada bagian ini diberikan definisi yang berkaitan dengan struktur aljabar meliputi grup, ring, field dan juga definisi ruang dan subruang vektor yang didasarkan pada [2], [3] dan [4].

Definisi 7. Sebuah grup adalah himpunan tak kosong G dengan operasi biner, dinotasikan dengan $*$, yang memenuhi:
(i). sifat tertutup

$$a * b = c, \text{ untuk setiap } a, b \in G \text{ maka } c \in G$$

(ii). sifat asosiatif sebagai berikut,

$$(a * b) * c = a * (b * c), \text{ untuk setiap } a, b, c \in G$$

(iii). eksistensi elemen identitas $e \in G$ sedemikian sehingga

$$e * a = a * e = a, \text{ untuk setiap } a \in G$$

(iv). eksistensi elemen invers untuk setiap $a \in G$, maka akan ada $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

Sebuah grup G adalah abelian atau komutatif jika $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in G$.

Definisi 8. Sebuah ring adalah himpunan tak kosong R dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian, yang memenuhi:
(i). R adalah grup abelian
(ii). sifat asosiatif sebagai berikut,

$$(ab)c = a(bc), \text{ untuk setiap } a, b, c \in R$$

(iii). sifat distributif sebagai berikut,

$$(a + b)c = ac + bc \text{ dan } c(a + b) = ca + cb, \text{ untuk setiap } a, b, c \in R$$

Sebuah ring R dikatakan komutatif jika $ab = ba$, untuk setiap $a, b \in R$.

Definisi 9. Sebuah field adalah himpunan tak kosong F dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian, yang memenuhi:
(i). F adalah grup abelian

(ii). Himpunan F^* yang merupakan himpunan dari semua elemen tak nol di F adalah grup abelian terhadap perkalian
(iii). sifat distributif sebagai berikut,

$$(a+b)c = ac + bc \text{ dan } c(a+b) = ca + cb, \text{ untuk setiap } a, b, c \in R$$

Himpunan $\mathbb{R}$ merupakan field.

Definisi 10. Misalkan F adalah field, yang elemen-elemennya dipandang sebagai skalar. Sebuah ruang vektor atas F adalah sebuah himpunan tak kosong V, yang elemen-elemennya dipandang sebagai vektor, dimana ada dua operasi yang berlaku, penjumlahan dan perkalian dengan skalar, yang memenuhi:
(i). sifat asosiatif penjumlahan sebagai berikut,

$$u + (v + w) = (u + v) + w, \text{ untuk setiap } u, v, w \in V$$

(ii). sifat komutatif penjumlahan sebagai berikut,

$$u + v = v + u, \text{ untuk setiap } u, v \in V$$

(iii). eksistensi vektor $0 \in V$ sedemikian sehingga

$$0 + u = u + 0, \text{ untuk setiap } u \in V$$

(iv). eksistensi invers penjumlahan untuk setiap $u \in V$, maka akan ada $-u \in V$ sedemikian sehingga

$$u + (-u) = (-u) + u = 0$$

(v). properti perkalian dengan skalar sebagai berikut

$$a(u + v) = au + av$$
$$(a + b)u = au + bu$$
$$(ab)u = a(bu)$$
$$1u = u$$

untuk setiap $a, b \in F$ dan $u, v \in V$.

Definisi 11. Sebuah himpunan S dikatakan sebagai subruang dari ruang vektor V jika $S \subseteq V$ yang memenuhi

$$au + bv \in V$$

untuk setiap $a, b \in F$ dan $u, v \in V$. Dengan kata lain, S tertutup terhadap operasi penjumlahan vektor sekaligus terhadap perkalian dengan skalar. Sebuah subruang adalah merupakan ruang vektor.

Definisi 12. Sebuah aljabar A atas field F adalah sebuah himpunan tak kosong, dimana ada tiga operasi yang berlaku, penjumlahan, perkalian dan perkalian dengan skalar, yang memenuhi sifat sebagai berikut:
(i). A adalah ruang vektor atas field F terhadap penjumlahan dan perkalian dengan skalar
(ii). A adalah ring terhadap penjumlahan dan perkalian
(iii). jika $r \in F$ dan $a, b \in A$, maka

$$r(ab) = (ra)b = a(rb)$$

2. Hasil Penelitian

Dalam bagian ini akan diuraikan sifat-sifat sederhana dari fungsi semisederhana. Untuk mengetahui hubungan fungsi sederhana dan fungsi semisederhana, terlebih dahulu diberikan definisi fungsi sederhana.

Definisi 13. Diberikan $I \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f: I \to \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan sederhana (*simple*) jika $f(I)$ berhingga [2].

Sebagai contoh, fungsi karakteristik pada $A \subseteq \mathbb{R}$, ditulis χ_A, yang didefinisikan

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & , \text{jika } x \notin A \\ 1 & , \text{jika } x \in A \end{cases}$$

merupakan fungsi sederhana karena $\chi_A(\mathbb{R}) = \{0,1\}$, yakni himpunan berhingga yang beranggotakan 0 dan 1.

Definisi 14. Diberikan $I \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f: I \to \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan semisederhana (*semisimple*) jika $f(I)$ terhitung [2].

Akibat dari Definisi 14, maka setiap fungsi sederhana merupakan fungsi semisederhana. Untuk sebaliknya tidak perlu berlaku, yakni suatu fungsi semisederhana belum tentu merupakan fungsi sederhana. Pada Contoh 15 berikut, akan diberikan sebuah fungsi semisederhana yang bukan merupakan fungsi sederhana.

Contoh 15. Diberikan fungsi $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, jika } x \notin Q \cap [0,1] \\ x & \text{, jika } x \in Q \cap [0,1] \end{cases}$$

Oleh karena itu, diperoleh $f([0,1])$ merupakan himpunan semua bilangan rasional pada selang $[0,1]$. Karena himpunan semua bilangan rasional terhitung, berdasarkan Teorema 4 dan 3, maka himpunan semua bilangan rasional pada selang $[0,1]$ terhitung, dalam hal ini terhitung tak hingga. Oleh karena itu disimpulkan f merupakan fungsi semisederhana pada selang $[0,1]$ yang bukan fungsi sederhana.

Untuk selanjutnya, koleksi semua fungsi semisederhana yang terdefinisi pada I dinyatakan dengan $\mathcal{S}(I)$.

Teorema 16. Jika $f \in \mathcal{S}(I)$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka $\alpha f \in \mathcal{S}(I)$.
Bukti. Diberikan $f \in \mathcal{S}(I)$. Karena $f(I)$ terhitung maka untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, himpunan $\alpha f(I) = \{\alpha f(x), \forall x \in I\}$ terhitung. Jadi $\alpha f \in \mathcal{S}(I)$. ■

Teorema 17. Jika $f, g \in \mathcal{S}(I)$ maka
(i). $f + g \in \mathcal{S}(I)$
(ii). $f - g \in \mathcal{S}(I)$
(iii). $fg \in \mathcal{S}(I)$
(iv). $f/g \in \mathcal{S}(I)$, $g(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in I$.

Bukti. Ambil sebarang $f, g \in \mathcal{S}(I)$, maka $f(I)$ dan $g(I)$ terhitung.
(i). Kasus $f(I)$ dan $g(I)$ tak hingga.
Misalkan $f(I) = \{q_1, q_2, q_3, \cdots\}$ dan $g(I) = \{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$. Karena $f(I)$ dan $g(I)$ terhitung, berdasarkan Definisi 1, maka terdapat fungsi bijektif $h_1: \mathbb{N} \to S_1$ dan $h_2: \mathbb{N} \to S_2$, dengan $S_1 = f(I)$ dan $S_2 = g(I)$. Akibatnya, $|f(I)| = |\mathbb{N}|$ dan $|g(I)| = |\mathbb{N}|$. Sehingga, berdasarkan Definsi 2 (ii) dan (iii), $|f(I)| = |g(I)| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Misalkan $s_{ij} = q_i + r_j\,; i, j = 1,2,3, \cdots$. Maka $(f + g)(I) = \{s_{ij}\,;\, i, j = 1,2,3, \cdots\}$. Akibatnya, $|(f + g)(I)| = |f(I)| = |g(I)| = \aleph_0$. Jadi $f + g \in \mathcal{S}(I)$.
Untuk kasus $f(I)$ dan $g(I)$ berhingga, serupa.
(ii). Karena $g(I)$ terhitung, berdasarkan Teorema 16 dengan mengambil $\alpha = -1$, maka $-g(I)$ terhitung. Akibatnya, berdasarkan bukti (i), $f - g \in \mathcal{S}(I)$ terhitung. Jadi $f - g \in \mathcal{S}(I)$.
(iii). Kasus $f(I)$ dan $g(I)$ tak hingga.
Misalkan $f(I) = \{u_1, u_2, u_3, \cdots\}$ dan $g(I) = \{v_1, v_2, v_3, \cdots\}$. Karena $f(I)$ dan $g(I)$ terhitung, berdasarkan Definisi 1, maka terdapat fungsi bijektif $h_1: \mathbb{N} \to S_1$ dan $h_2: \mathbb{N} \to S_2$, dengan $S_1 = f(I)$ dan $S_2 = g(I)$. Akibatnya, $|f(I)| = |\mathbb{N}|$ dan $|g(I)| = |\mathbb{N}|$. Sehingga, berdasarkan Definsi 2 (ii) dan (iii),

$|f(I)| = |g(I)| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Misalkan $t_{ij} = u_i v_j$; $i, j = 1,2,3, \cdots$. Maka $(fg)(I) = \{t_{ij}\ ;\ i, j = 1,2,3, \cdots\}$. Akibatnya, $|(fg)(I)| = |f(I)| = |g(I)| = \aleph_0$. Jadi $fg \in \mathcal{S}(I)$.
Untuk kasus $f(I)$ dan $g(I)$ berhingga, serupa.

(iv). Misalkan $g(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in I$. Akibatnya, berdasarkan bukti (iii), $\left(\frac{f}{g}\right)(I) = \left(f\left(\frac{1}{g}\right)\right)(I)$ terhitung. Jadi $f/g \in \mathcal{S}(I)$. ■

Dari Teorema 17, diperoleh akibat berikut.

Akibat 18. Jika $f_i \in \mathcal{S}(I)$, untuk $i = 1,2, \dots, n$, maka
(i). $\sum_{i=1}^{n} f_i \in \mathcal{S}(I)$,
(ii). $f_1 f_2 \dots f_n \in \mathcal{S}(I)$

Teorema 19. Diberikan $I \subseteq \mathbb{R}$ dan $f: I \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu. $f \in \mathcal{S}(I)$ jika dan hanya jika f fungsi konstan pada I.

Bukti. ($\Rightarrow$) Akan dibuktikan secara kontradiksi.
Andaikan f tidak konstan pada I. Akibatnya, terdapat $x_0, x_1 \in I$ dengan $f(x_0) \neq f(x_1)$. Untuk kasus $f(x_0) < f(x_1)$, karena f kontinu pada I maka $(f(x_0), f(x_1)) \subseteq f(I)$. Karena $f(I)$ terhitung, berdasarkan Teorema 2 (i), akibatnya selang $(f(x_0), f(x_1))$ terhitung. Hal ini kontradiksi dengan Teorema 6.
Untuk kasus $f(x_0) > f(x_1)$, serupa.
Jadi haruslah f fungsi konstan pada I.
($\Leftarrow$) Jika f fungsi konstan pada I maka $f(I)$ singleton. Jadi $f \in \mathcal{S}(I)$. ■

Teorema 20. Diberikan fungsi $f: I \to \mathbb{R}$ dan $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jika f fungsi kontinu pada I dan $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, maka fungsi komposisi $g \circ f \in \mathcal{S}(I)$.

Bukti. Karena $(g \circ f)(I) \subseteq g(\mathbb{R})$ dan $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, berdasarkan Teorema 3 (i), maka $g \circ f \in \mathcal{S}(I)$ ■

Teorema 21. Diberikan $I \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f: I \to \mathbb{R}$. Jika $f \in \mathcal{S}(I)$, maka $|f| \in \mathcal{S}(I)$.

Bukti. Jika $f \in \mathcal{S}(I)$, maka $f(I)$ terhitung. Oleh karena itu himpunan $|f|(I) = \{|f(x)| : x \in I\}$ terhitung. Jadi, $f \in \mathcal{S}(I)$. ■

Teorema 22. Jika $f, g \in \mathcal{S}(I)$ maka
(i). $f \vee g \in \mathcal{S}(I)$
(ii). $f \wedge g \in \mathcal{S}(I)$

Bukti. (i) Diperhatikan bahwa
$$f \vee g = \frac{f+g+|f-g|}{2}$$
Berdasarkan Teorema 16, 17, dan 21, disimpulkan bahwa $f \vee g \in \mathcal{S}(I)$.

(ii) Diperhatikan bahwa
$$f \wedge g = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$
Berdasarkan Teorema 16, 17, dan 21, disimpulkan bahwa $f \wedge g \in \mathcal{S}(I)$. ■

Ruang fungsi $\boldsymbol{\mathcal{S}(I)}$

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa $\mathcal{S}(I)$ merupakan ruang vektor atas field real. Selain itu, juga dibahas hal lain yang berkenaan dengan ruang vektor $\mathcal{S}(I)$, yakni aljabar.

Teorema 23. Koleksi $\mathcal{S}(I)$ merupakan ruang vektor atas field real.

Bukti. Seperti diketahui, dari Teorema 16 dan Teorema 17 (i), disimpulkan bahwa untuk setiap $f, g \in \mathcal{S}(I)$ dan setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ berlaku $\alpha f + \beta g \in \mathcal{S}(I)$. Sehingga $\mathcal{S}(I)$ memenuhi Definisi 11. Jadi $\mathcal{S}(I)$ merupakan ruang vektor atas field real. ∎

Teorema 24. $\mathcal{S}(I)$ merupakan aljabar.

Bukti. Berdasarkan Teorema 23, $\mathcal{S}(I)$ adalah ruang vektor. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 16 dan Teorema 17, $\mathcal{S}(I)$ memenuhi Definisi 8 dan memenuhi Definisi 12 (iii). Jadi $\mathcal{S}(I)$ merupakan aljabar. ∎

3. Kesimpulan dan Saran

Dari hasil dan pembahasan diperoleh beberapa sifat fungsi semisederhana, diantaranya setiap fungsi sederhana merupakan fungsi semisederhana tetapi tidak berlaku sebaliknya, fungsi kontinu dan semisederhana jika dan hanya jika fungsi konstan. Selain itu diperoleh hasil, bahwa koleksi semua fungsi semisederhana merupakan ruang vektor atas lapangan real dan sekaligus juga aljabar.

4. Daftar Pustaka

[1] Bartle R G dan Sherbert D R 2011 *Introduction to Real Analysis* Fourth Edition (New York: John Wiley & Sons, Inc.)
[2] Chong E K P dan Zak S H 2001 *An Introduction to Optimization* Second Edition (New York: John Wiley & Sons, Inc.)
[3] Junghenn H D 2015 *A Course in Real Analysis* (Boca Raton: Taylor & Francis Group, LLC)
[4] Roman S 2008 *Advance Linear Algebra* Third Edition (New York: Springer Science+Business Media, LLC)
[5] Royden H L dan Fitzpatrick P M 2010 *Real Analysis* Fourth Edition (Singapore: Pearson Education Asia Limited and China Machine Press)

Ucapan terimakasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada rektor Universitas Jember yang telah memberikan dukungan dana untuk penelitian ini melalui kegiatan Hibah Keris Batch 4 tahun 2018 LP2M Universitas Jember.