Distribusi Logaritmik U-Kuadratik

Muhammad Nurul Huda[1]
[1]Departemen Matematika, Universitas Gadjah Mada

Abstract. Distribusi U-kuadratik (UQ) adalah sebuah distribusi probabilitas kontinu yang fungsi densitas nya diilustrasikan sebagai kurva fungsi kuadrat berbentuk huruf U (simetris terhadap rata-rata) dalam interval real tertutup. Jika Y variabel acak berdistribusi UQ(a,b) dengan parameter a dan b, maka fungsi densitas dari Y dapat dinyatakan sebagai berikut

$$f_Y(y) := \frac{12}{(b-a)^3}\left(y - \frac{a+b}{2}\right)^2, \qquad y \in [a,b], -\infty < a < b < \infty.$$

Dalam makalah ini, akan dikaji sebuah generalisasi dari distribusi UQ yang disebut sebagai *distribusi logaritmik U-kuadratik* (log-UQ), dimana memiliki variabel acak X berbentuk $X = e^Y$. Lebih lanjut, akan ditentukan beberapa sifat statistik dari distribusi log-UQ antara lain kuantil, modus, momen, dan fungsi pembangkit momen.

Keyword. Distribusi U-Kuadratik, Kuantil, Modus, Momen, Fungsi Pembangkit Momen.

1. Pendahuluan

Distribusi U-kuadratik UQ adalah sebuah distribusi probabilitas kontinu yang fungsi densitas nya diilustrasikan sebagai kurva fungsi kuadrat berbentuk huruf U yang simetris terhadap rata-rata dan terdefinisi dalam interval real tertutup $[a, b]$, dengan a dan b merupakan dua parameter dari distribusi UQ, untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ dan $b > a$. Misalkan Y merupakan variabel acak berdistribusi UQ, didefinisikan fungsi densitas (pdf) dan fungsi distribusi kumulatif (cdf) dari Y berturut-turut

$$f_Y(y) := \frac{12}{(b-a)^3}\left(y - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

dan

$$F_Y(y) := \frac{4}{(b-a)^3}\left(\left(y - \frac{a+b}{2}\right)^3 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^3\right)$$

untuk setiap $y \in [a, b]$. Berdasarkan [8], distribusi U-kuadratik mempunyai modus, median, dan rata-rata yang sama yaitu $\frac{a+b}{2}$ dan memiliki ukuran ketidaksimetrisan kurva fungsi densitas (*skewness*) sama dengan 0.

Dalam pemodelan statistika, masih banyak permasalahan dalam kehidupan nyata yang direpresentasikan dalam bentuk data-data yang memerlukan adanya model-model atau distribusi-distribusi baru untuk mempermudah investigasi atau mengefektifkan hasil kesimpulan yang diperoleh dari data-data tersebut. Sebagai contoh, Ashour et al [5] mengembangkan model Log-Gamma-Rayleigh (LGR) yang ternyata menghasilkan *fit* data set "Kekuatan pemecah serat karbon tunggal dengan panjang yang berbeda" (data diambil dari [9]) lebih baik dibandingkan dengan model Weibull-Rayleigh (WR), Exponentiated Weibull (EW), dan Exponentiated Rayleigh (ER) berdasarkan parameter-parameter *maximized* log-likelihood, tes Kolmogorov-Smirnov (K-S), *Akaike Information Criterion* (AIC), *Bayesian Information Criterion* (BIC), *Anderson-Darling statistic* (AD), dan *Cramer von Mises statistic* (CM). Akibatnya, banyak matematikawan atau statistikawan melakukan penelitian untuk membentuk model atau distribusi baru dengan cara menggeneralisasi suatu distribusi atau mencampurkan beberapa distribusi menggunakan metode tertentu. Beberapa penelitian diantaranya, yaitu kontruksi distribusi Log-Gamma-Reyleigh menggunakan metode T-X (dikenalkan oleh Alzaatreh et al [3]) yang dikenakan pada keluarga Log-Gamma-X oleh Ashour et al [5], generalisasi distribusi UQ menggunakan metode generator Kumaraswamy-G oleh Muhammad et al [6], konstruksi distribusi beta log-logistic [10], dan kontruksi distribusi L-kuadratik dibangun dari distribusi UQ menggunakan *quadratic rank transmutation map* oleh Bleed [4].

Termotivasi dari beberapa penelitian sebelumnya, makalah ini bertujuan untuk mengkaji distribusi UQ yang digeneralisasi menggunakan transformasi logaritmik yang dikenakan pada variabel acak Y berdistribusi UQ, sedemikian sehingga membentuk variabel acak baru $X = e^Y$. Dalam hal ini, variabel acak X dikatakan berdistribusi logaritmik U-kuadratik (log-UQ). Tujuan daripada penerapan transformasi logaritmik pada distribusi UQ yaitu sebagai pengembangan model tersebut untuk membentuk model baru (log-UQ) yang harapannya dapat diaplikasikan baik dalam bidang statistika maupun bidang yang lain. Lebih lanjut, akan dikaji beberapa sifat statistik dari distribusi log-UQ antara lain kuantil, modus, momen, dan fungsi pembangkit momen.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif bertipe pengembangan teori. Tahap awal penelitian yaitu menentukan cdf dari distribusi log-UQ menggunakan metode fungsi distribusi karena metode tersebut dapat digunakan ketika variabel acak berdistribusi kontinu dan cenderung lebih mudah untuk digunakan dibandingkan metode lain. Tahap selanjutnya yaitu menentukan beberapa sifat statistik yang berkaitan dengan distribusi log-UQ antara lain kuantil, modus, momen, dan fungsi pembangkit momen.

3. Hasil Penelitian

Untuk menentukan cdf dan pdf dari distribusi log-UQ, dipilih metode fungsi distribusi yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1 [1] (Metode Fungsi Distribusi). Misalkan V adalah fungsi variabel acak $W_1, W_2, \dots, W_n$.

1. Tentukan daerah $V = v$ di dalam ruang $(w_1, w_2, \dots, w_n)$.
2. Tentukan daerah $V \leq v$.
3. Tentukan $F_V(v) = \Pr[V \leq v]$ dengan mengintegralkan $f(w_1, w_2, \dots, w_n)$ atas daerah $V \leq v$.
4. Tentukan fungsi densitas $f_V(v)$ dengan mendiferensialkan $F_V(v)$.

Diberikan variabel acak Y berdistribusi UQ(a,b) dan didefinisikan fungsi variabel acak $X = e^Y$. Dengan menggunakan metode fungsi distribusi pada Definisi 1, diperoleh

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x] = \Pr[e^Y \leq x] = \Pr[Y \leq \ln x] = F_Y(\ln x)$$

Jika $x < e^a$ maka $\ln x < a$ dan berakibat $F_Y(\ln x) = 0$. Demikian pula, jika $x > e^b$ maka $\ln x > b$ dan berakibat $F_Y(\ln x) = 1$. Akan tetapi, jika $e^a \leq x \leq e^b$ maka

$$F_Y(\ln x) = \int_{e^a}^{\ln x} f(y)\, dy = \int_{e^a}^{\ln x} \frac{12}{(b-a)^3}\left(y - \frac{a+b}{2}\right)^2 dy$$

dan berakibat $F_Y(\ln x) = \frac{4}{(b-a)^3}\left(\left(\ln x - \frac{a+b}{2}\right)^3 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^3\right)$. Akibatnya, diperoleh

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, e^a) \\ \dfrac{4}{(b-a)^3}\left(\left(\ln x - \dfrac{a+b}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^3\right), & x \in [e^a, e^b]. \\ 1, & x \in \left(e^b, \infty\right) \end{cases}$$

Diperhatikan bahwa $F_X(x)$ merupakan cdf dari X berdistribusi log-UQ(a,b) karena $\lim_{s\to-\infty} F_X(s) = 0$, $\lim_{s\to+\infty} F_X(s) = 1$, dan untuk sebarang $e^a \leq x_1 \leq x_2 \leq e^b$ berlaku $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$. Selanjutnya, dengan mendiferensialkan cdf (terhadap x) dari X, maka diperoleh

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{(b-a)^3 x}\left(\ln x - \dfrac{a+b}{2}\right)^2, & x \in [e^a, e^b] \\ 0, & x \notin [e^a, e^b] \end{cases}.$$

Diperhatikan bahwa $f_X(x)$ merupakan pdf dari X berdistribusi log-UQ(a,b) karena $f_X(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$.

3.1. Kuantil

Definisi 2 [1]. Jika X variabel acak kontinu dan $p \in (0,1)$, maka kuantil ke-p dari X, dinotasikan dengan ϕ_p, adalah nilai terkecil yang memenuhi $F_X(\phi_p) = p$.

Secara khusus, jika berturut-turut $p \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$ maka ϕ_p dapat dikatakan sebagai kuartil ke-1,2,3 dari X dan $\phi_{0.5}$ dikatakan sebagai median dari X. Secara umum, diperoleh kuantil ke-p dari X dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1. Kuantil ke-p dari X yaitu $\phi_p = exp\left[\frac{a+b+(b-a)\sqrt[3]{2p-1}}{2}\right]$.

Bukti. Misalkan ϕ_p adalah nilai terkecil yang memenuhi $F_X(\phi_p) = p$. Diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{4}{(b-a)^3}\left(\left(ln\,\phi_p - \frac{a+b}{2}\right)^3 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^3\right) &= p \\ \left(ln\,\phi_p - \frac{a+b}{2}\right)^3 &= \frac{(b-a)^3 p}{4} - \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \\ \phi_p &= exp\left[\frac{a+b+(b-a)\sqrt[3]{2p-1}}{2}\right] \end{aligned}$$

■

Akibat 1. Median dari X yaitu $\phi_{0.5} = e^{\frac{a+b}{2}}$.

Berdasarkan akibat 1, dapat dipahami bahwa median dari distribusi log-UQ ekuivalen dengan eksponensial e pangkat median dari distribusi UQ.

3.2. Modus

Diberikan sebuah fungsi f yang terdefinisi pada domain $D \subseteq \mathbb{R}$. Diperhatikan dua definisi berikut ini.

Definisi 3 [2]. Titik c disebut sebagai titik kritis dari fungsi f jika c berada dalam D dan memenuhi $f'(c) = 0$ atau $f'(c)$ tidak ada.

Definisi 4 [2]. Fungsi f punya maksimum lokal di c jika terdapat interval buka I memuat c sedemikian sehingga $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in I$. Fungsi f punya minimum lokal di c jika terdapat interval buka I memuat c sedemikian sehingga $f(c) \leq f(x)$ untuk setiap $x \in I$.

Titik c dalam Definisi 4 disebut sebagai titik maksimum (minimum) lokal. Jika berlaku $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in D$ maka $f(c)$ dikatakan sebagai nilai maksimum global dan dengan cara serupa jika berlaku $f(c) \leq f(x)$ untuk setiap $x \in D$ maka $f(c)$ dikatakan sebagai nilai minimum global.

Dengan kata lain, maksimum global merupakan maksimum lokal terbesar dan minimum global merupakan minimum lokal terkecil.

Teorema 2 [2] (Teorema Nilai Ekstrim). Jika f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ maka f mencapai sebuah nilai maksimum global $f(c)$ dan sebuah nilai minimum global $f(d)$ di suatu $c, d \in [a. b]$.

Definisi 5 [7]. Modus dari distribusi probabilitas kontinu adalah setiap nilai variabel acak x yang merupakan titik maksimum lokal.

Oleh karena distribusi UQ dan log-UQ masing-masing merupakan distribusi kontinu dan terdefinisi pada interval tertutup maka berdasarkan Teorema 2, pdf dari masing-masing distribusi tersebut memuat maksimum dan minimum global, yang mana pdf atas kedua titik batas interval tertutup bisa menjadi nilai maksimum atau minimum lokal. Oleh karena distribusi UQ berbentuk U maka pdf atas kedua titik batas interval merupakan nilai maksimum lokal sekaligus nilai maksimum global (karena nilai pdf atas kedua titik batas interval adalah sama), sehingga distribusi UQ disebut sebagai distribusi bimodal (memiliki dua modus).

Teorema 3 [2] (Teorema Uji Turunan Pertama). Misalkan c adalah titik kritis dari fungsi kontinu f.

a. Jika f' berubah tanda dari positif ke negatif di c maka $f(c)$ merupakan nilai maksimum lokal.
b. Jika f' berubah tanda dari negatif ke positif di c maka $f(c)$ merupakan nilai minimum lokal.
c. Jika f' tidak berubah tanda di c maka $f(c)$ bukan merupakan nilai maksimum atau minimum lokal.

Selanjutnya, teorema berikut ini menunjukkan bahwa distribusi log-UQ juga merupakan distribusi bimodal.

Teorema 4. Modus dari X yaitu $m_0 = \begin{cases} e^a \wedge e^b, & (b-a) \in (0,4) \\ e^a \wedge e^{\frac{a+b+4}{2}}, & (b-a) \in [4, \infty) \end{cases}$.

Bukti. Diberikan pdf dari X berdistribusi log-UQ(a,b) yaitu $f_X(x) = \frac{12}{(b-a)^3 x}\left(\ln x - \frac{a+b}{2}\right)^2$ untuk setiap $a < b$. Diperhatikan bahwa

$$f_X'(x) = -\frac{12}{(b-a)^3 x^2}\left(\ln x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{24}{(b-a)^3 x^2}\left(\ln x - \frac{a+b}{2}\right)$$

Ketika $f_X'(x) = 0$ maka diperoleh dua titik kritis yaitu $x_1 = e^{\frac{a+b}{2}}$ dan $x_2 = e^{\frac{a+b+4}{2}}$. Dengan menerapkan teorema 3, diperoleh $f_X'(x) > 0$ untuk setiap $x \in (x_1, x_2)$ dan $f_X'(x) < 0$ untuk setiap $x \in (0, x_1) \cup (x_2, \infty)$, sehingga titik x_1 dan x_2 berturut-turut merupakan titik minimum lokal dan titik maksimum lokal pada interval $(0, \infty)$. Misalkan $b = a + \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka pada interval tertutup $[e^a, e^b]$, titik e^a merupakan titik maksimum lokal karena terdapat $\delta = e^{a+\frac{\varepsilon}{3}} - e^a$ sedemikian sehingga $f_X(e^a) > f_X(x)$ untuk setiap $x \in (e^a - \delta, e^a + \delta)$. Perlu diperhatikan bahwa

$$min\{e^b, x_2\} = \begin{cases} e^b, & (b-a) \in (0,4) \\ x_2, & (b-a) \in [4, \infty) \end{cases}.$$

Akibatnya, berdasarkan teorema nilai ekstrim diperoleh bahwa

1. untuk $(b-a) \in (0,4)$, terdapat dua titik maksimum lokal dalam interval $[e^a, e^b]$ yaitu e^a dan e^b.
2. untuk $(b-a) \in (4, \infty)$, terdapat dua titik maksimum lokal dalam interval $[e^a, e^b]$ yaitu e^a dan x_2.

Dengan demikian, diperoleh

$$m_0 = \begin{cases} e^a \wedge e^b, & (b-a) \in (0,4) \\ e^a \wedge x_2, & (b-a) \in [4, \infty) \end{cases}.$$

■

Dapat dipahami bahwa $f_X(e^a) > f_X(min\{e^b, x_2\})$ untuk setiap $a < b$, sehingga $f_X(e^a)$ merupakan nilai maksimum global dalam interval $[e^a, e^b]$. Berdasarkan Teorema 4, distribusi log-UQ memiliki dua modus pada masing-masing kasus, sehingga distribusi tersebut juga merupakan distribusi bimodal. Akan tetapi, nilai modusnya sangat berbeda jika dibandingkan dengan nilai modus dari distribusi UQ.

3.3. Momen dan Fungsi Pembangkit Momen

Teorema 5. Momen ke-k (μ_k') dari X yaitu

$$\mu_k' = \frac{\alpha}{k}\left[\left(e^{bk}b^2 - e^{ak}a^2\right) - \left(\frac{2}{k} + 2\beta\right)\left(e^{bk}b - e^{ak}a\right) + \left(\frac{2}{k^2} + \frac{2\beta}{k} + \beta^2\right)\left(e^{bk} - e^{ak}\right)\right]$$

dengan $\alpha = \frac{12}{(b-a)^3}$ dan $\beta = \frac{a+b}{2}$.

Bukti. Diperhatikan bahwa

$$\mu_k' = \mathbb{E}(X^k) = \frac{12}{(b-a)^3}\int_{e^a}^{e^b} x^{k-1}\left(\ln x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

$$\mu_k' = \frac{12}{(b-a)^3}\int_{e^a}^{e^b} x^{k-1}\ln^2 x - (a+b)x^{k-1}\ln x + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 x^{k-1}\, dx$$

Misalkan $I_1 \coloneqq \int_{e^a}^{e^b} x^{k-1}\ln^2 x\, dx$ dan $I_2 \coloneqq \int_{e^a}^{e^b}(a+b)x^{k-1}\ln x\, dx$. Dengan menerapkan metode integral parsial pada I_1 dan I_2, diperoleh

$$I_1 = \frac{1}{k}\left(e^{bk}b^2 - e^{ak}a^2\right) - \frac{2}{k^2}\left(e^{bk}b - e^{ak}a\right) + \frac{2}{k^3}\left(e^{bk} - e^{ak}\right)$$

$$I_2 = \frac{(a+b)}{k}\left(e^{bk}b - e^{ak}a\right) - \frac{(a+b)}{k^2}\left(e^{bk} - e^{ak}\right)$$

Akibatnya dengan memisalkan $\alpha = \frac{12}{(b-a)^3}$ dan $\beta = \frac{a+b}{2}$, diperoleh

$$\mu_k' = \alpha\left[I_1 - I_2 + \frac{\beta^2}{k}\left(e^{bk} - e^{ak}\right)\right]$$

$$\mu_k' = \alpha\left[\frac{1}{k}\left(e^{bk}b^2 - e^{ak}a^2\right) - \left(\frac{2}{k^2} + \frac{2\beta}{k}\right)\left(e^{bk}b - e^{ak}a\right) + \left(\frac{2}{k^3} + \frac{2\beta}{k^2} + \frac{\beta^2}{k}\right)\left(e^{bk} - e^{ak}\right)\right]$$

$$\mu_k' = \frac{\alpha}{k}\left[\left(e^{bk}b^2 - e^{ak}a^2\right) - \left(\frac{2}{k} + 2\beta\right)\left(e^{bk}b - e^{ak}a\right) + \left(\frac{2}{k^2} + \frac{2\beta}{k} + \beta^2\right)\left(e^{bk} - e^{ak}\right)\right]$$

■

Berdasarkan Teorema 5, rata-rata dari X ekuivalen dengan momen ke-1 dari X yaitu

$$\mu_1' = \alpha\left\{\left(b^2e^b - a^2e^a\right) - (2 + 2\beta)\left(be^b - ae^a\right) + (2 + 2\beta + \beta^2)\left(e^b - e^a\right)\right\}$$

Selain itu, untuk $k \in \{2,3,4\}$ diperoleh momen ke-k dari X yaitu

$$\mu_2' = \frac{\alpha}{2}\left\{\left(b^2e^{2b} - a^2e^{2a}\right) - (1 + 2\beta)\left(be^{2b} - ae^{2a}\right) + \left(\frac{1}{2} + \beta + \beta^2\right)\left(e^{2b} - e^{2a}\right)\right\},$$

$$\mu_3' = \frac{\alpha}{3}\left\{\left(b^2e^{3b} - a^2e^{3a}\right) - \left(\frac{2}{3} + 2\beta\right)\left(be^{3b} - ae^{3a}\right) + \left(\frac{2}{9} + \frac{2\beta}{3} + \beta^2\right)\left(e^{3b} - e^{3a}\right)\right\},$$

$$\mu_4' = \frac{\alpha}{4}\left\{\left(b^2e^{4b} - a^2e^{4a}\right) - \left(\frac{1}{2} + 2\beta\right)\left(be^{4b} - ae^{4a}\right) + \left(\frac{2}{16} + \frac{\beta}{2} + \beta^2\right)\left(e^{4b} - e^{4a}\right)\right\}.$$

Bentuk momen tersentral dari X, yaitu $\mu_k = \mathbb{E}[(X - \mu_1')^k] = \sum_{s=1}^{k}\binom{k}{s}\mu_s'(\mu_1')^{k-s}$. Perhatikan bahwa variansi dapat dinyatakan sebagai μ_2, sedangkan ukuran *skewness* (ketidaksimetrisan bentuk pdf terdapat rata-rata) dan kurtosis (keruncingan kurva pdf) berturut-turut dapat dinyatakan sebagai $\widetilde{\mu_3} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$ dan $Kurt[X] = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$. Akibatnya, ukuran-ukuran tersebut dapat ditentukan dengan mensubstitusi momen ke-k untuk suatu k.

Tabel 1. Perhitungan numerik dari momen ke-1, variansi, *skewness*, dan kurtosis untuk suatu $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$.

a	b	e^a	e^b	μ_1'	μ_2	$\widetilde{\mu_3}$	$Kurt[X]$
0.6	1.2	1.822119	3.320116923	2.526369	0.334601	0.06672148	1.202001832
0.6	1.9	1.822119	6.685894442	3.9439924	3.453178	0.14702349	1.244078313
0.6	2.4	1.822119	11.02317638	5.6243631	12.07211	0.20713463	1.292163213
0.6	3.5	1.822119	33.11545196	13.315156	130.3244	0.34871990	1.44592222
-1.5	-1	0,22313	0,36788	0.2918967	0.003129	0.05551864	1.19848642
-1.5	0.8	0.22313	2.225540928	1.0070515	0.555465	0.26994047	1.354295163
-1.5	1	0.22313	2.718281828	1.1792239	0.851487	0.29581035	1.382851674
-1.5	1.5	0.22313	4.48168907	1.7708523	2.396377	0.36216808	1.462877006
-1.5	3	0.22313	20.0855369	6.4380900	46.51603	0.57024912	1.766576542

Berdasarkan tabel 1, semakin besar selisih nilai parameter a dan b maka ukuran μ_1', μ_2, $\widetilde{\mu_3}$, dan $Kurt[X]$ juga semakin besar.

Selanjutnya menggunakan Teorema 5, diperoleh fungsi pembangkit momen yang dinyatakan pada teorema berikut.

Teorema 6. Fungsi pembangkit momen dari X yaitu

$$m_X(t) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{t^s \alpha}{(s-1)!\, s^2} \left\{ \left(b^2 e^{bs} - a^2 e^{as}\right) - \left(\frac{2}{s} + 2\beta\right)\left(b e^{bs} - a e^{as}\right) + \left(\frac{2}{s^2} + \frac{2\beta}{s} + \beta^2\right)\left(e^{bs} - e^{as}\right) \right\},$$

dengan $\alpha = \frac{12}{(b-a)^3}$ dan $\beta = \frac{a+b}{2}$.

Bukti. Diperhatikan bahwa $m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}\left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(tX)^s}{s!}\right]$. Oleh karena nilai ekspektasi bersifat linear, maka $m_X(t) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{t^s \mu_s'}{s!}$. Substitusi μ_s' ke dalam $m_X(t)$ sehingga diperoleh klaim.

■

4. Kesimpulan dan Saran

Dari hasil penelitian, diperoleh kontruksi distribusi logaritmik U-kuadratik (log-UQ) dan beberapa sifat statistik meliputi kuantil (Teorema 1), modus (Teorema 4), momen (Teorema 5), dan fungsi pembangkit momen (Teorema 6). Kemudian, saran untuk penelitian selanjutnya adalah menentukan sifat-sifat statistik yang lain dari distribusi log-UQ seperti fungsi karakteristik dan entropi, atau mengkontruksi sebuah distribusi baru yang dibangun dari distribusi log-UQ.

5. Daftar Pustaka

[1] Wackerly, D.D., Mendenhall, III.W., Scheaffer, R.L., 2008, *Mathematical Statistics with Applications* (Belmont CA: Thomson Brooks/Cole), pp. 164.

[2] Stewart, J., 2008, *Calculus: Early Transedental* (Belmont CA: Thomson Brooks/Cole), pp. 271-272.

[3] Alzaatreh, A., Lee, C., Famoye, F. (2013). A new method for generating families of continuous distributions. *Metron*. 71(1). pp. 63-79.

[4] Bleed, S.O. (2018). L-Quadratic Distribution. *International Journal of Computer Applications (0975-8887)*. 179(13).

[5] Ashour, S., Darwish, D., Ahmad, S. (2018). Log-Gamma - Rayleigh Distribution: Properties and Applications. *Journal of Science.* 3(31), pp. 967-983.

[6] Muhammad, M., Muhammad, I., Yaya, A.M. (2018). The Kumaraswamy Exponentiated U-Quadratic Distribution: Properties and Application. *Asian Journal of Probability and Statistics.* 3(1), pp. 1-17.

[7] Zhang, C., Mapes, B.E., Soden, B.J. (2003). Bimodality in tropical water vapour. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 129, pp. 2847-2866.

[8] Edeki, S.O., Okagbue, H.I., Akinlabi, G.O., Opanuga, A.A., Osheku, A.S. (2016). The U-Quadratic Distribution as a Proxy for a Transformed Triangular Distribution (TTD). *Research Journal of Applied Sciences*, 11(5), pp. 221-223.

[9] Crowder, M.J., 2001, *Classical Competing Risks* (Chapman and Hall/CRC),

[10] Lemonte, A.J. (2014). The beta log-logistic distribution. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 28(3), pp. 313-332.