

Pelabelan Harmonis Ganjil pada Amalgamasi Graf Kincir Angin *Double Quadrilateral*

Fery Firmansah¹, Muhammad Wahid Syaifuddin²

^{1,2}Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Widya Dharma Klaten

Abstract. Amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)}$ dengan $n \geq 1$ adalah graf yang dibentuk dari operasi amalgamasi dua graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(n)}$ dengan graf lintasan P_2 . Graf yang memenuhi sifat pelabelan harmonis ganjil disebut sebagai graf harmonis ganjil. Pada makalah ini, akan ditunjukkan bahwa amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)}$ dengan $n \geq 1$ memenuhi sifat pelabelan harmonis ganjil sedemikian sehingga amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)}$ dengan $n \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil.

Keyword. double quadrilateral, graf kincir angin, graf harmonis ganjil, pelabelan graf

1. Pendahuluan

Graf harmonis ganjil ditemukan oleh Laing dan Bai tahun 2009. Graf harmonis ganjil $G(p, q)$ adalah graf yang memenuhi sifat pelabelan harmonis ganjil yaitu fungsi pelabelan simpul $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, 2q - 1\}$ bersifat injektif sedemikian sehingga menginduksi fungsi pelabelan busur $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \dots, 2q - 1\}$ dengan $f^*(ab) = f(a) + f(b)$ yang bersifat bijektif (Liang dan Bai, 2009). Sampai tahun 2018 telah banyak hasil penelitian yang telah diterbitkan baik berupa jurnal maupun prosiding tentang graf harmonis ganjil. Penelitian yang relevan dengan makalah ini antara lain Vaidya, S. K., dan Shah, N. H. (2011), Vaidya, S. K., dan Shah, N. H. (2012), Alyani, dkk (2013), Saputri, G. A., dkk (2013), Abdel-All (2014), Jeyanthi, P dkk (2015), Firmansah dan Sugeng (2015), Firmansah dan Syaifuddin (2016), Firmansah (2016), Firmansah dan Yuwono (2017), Firmansah (2017), dan Firmansah dan Syaifuddin (2018).

Penelitian ini pada dasarnya adalah penelitian lanjutan dari penelitian penulis sebelumnya. Firmansah dan Syaifuddin (2016) telah memperkenalkan definisi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(n)}$ beserta sifat-sifatnya, lebih lanjut pada makalah yang sama telah dibuktikan bahwa graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(n)}$ adalah graf harmonis ganjil. Amalgamasi graf G dengan simpul u dan H dengan simpul v adalah graf baru $G * H$ yang diperoleh dengan menggabungkan simpul u dan v menjadi simpul z . Firmansah dan Syaifuddin (2018) telah membuktikan bahwa amalgamasi graf kincir angin belanda $C_4^{(n)} * P_2 * C_4^{(n)}$ dengan $n \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil.

Pada makalah kali ini penulis akan mengkonstruksi graf baru yaitu amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)}$ dengan $n \geq 1$ beserta sifat-sifatnya, lebih lanjut akan ditunjukkan amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)}$ dengan $n \geq 1$ memenuhi sifat pelabelan harmonis ganjil sedemikian sehingga amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)}$ dengan $n \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil.

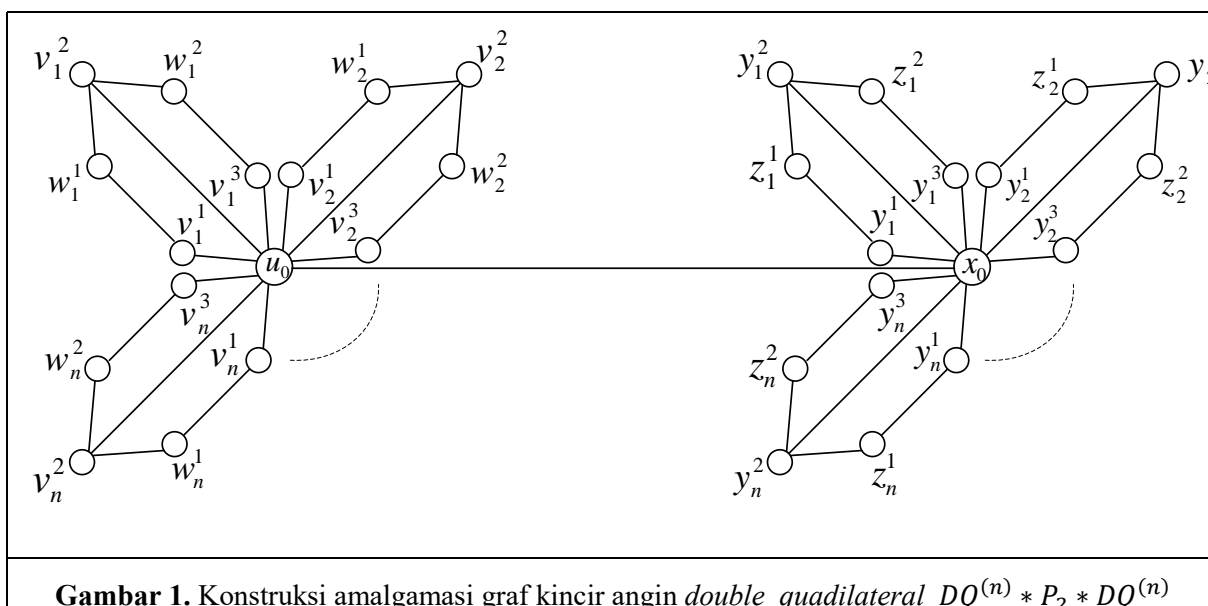
2. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif berjenis pengembangan toeri. Pada tahapan awal penelitian, peneliti menelaah referensi yang relevan untuk mendapatkan *open problem* yang akan diselesaikan. Tahap berikutnya, peneliti mengkonstruksi graf baru beserta sifat-sifatnya. Berdasarkan sifat-sifat khusus yang telah diperoleh dari konstruksi graf, penulis mengkonstruksi rumus fungsi pelabelan simpul dan rumus fungsi pelabelan busur yang memenuhi sifat-sifat pelabelan harmonis ganjil. Tahapan akhir dari penelitian ini, penulis menyatakan hasil penelitian dalam teorema disertai dengan bukti secara matematis.

3. Hasil Penelitian

Hasil penelitian disajikan dalam bentuk definisi dan teorema disertai buktinya secara matematis. Graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(n)}$ adalah graf yang diperoleh dari n graf *double quadrilateral* DQ yang mempunyai satu simpul pusat pesekutuan (Firmansah dan Syaifuddin, 2016).

Definisi 1. Amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)}$ dengan $n \geq 1$ adalah amalgamasi dua graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(n)}$ dengan graf lintasan P_2 . Secara lebih lengkap Definisi 1. dapat dilihat pada Gambar 1. berikut ini.



Gambar 1. Konstruksi amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)}$

Berdasarkan Gambar 1 diperoleh

$$\begin{aligned}
 V(DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)}) &= \{u_0\} \cup \{v_i^j | 1 \leq i \leq n, j = 1,2,3\} \cup \{w_i^j | 1 \leq i \leq n, j = 1,2\} \\
 &\cup \{x_0\} \cup \{y_i^j | 1 \leq i \leq n, j = 1,2,3\} \cup \{z_i^j | 1 \leq i \leq n, j = 1,2\} \text{ dan} \\
 E(DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)}) &= \{u_0 v_i^j | 1 \leq i \leq n, j = 1,2,3\} \cup \{v_i^{2j-1} w_i^j | 1 \leq i \leq n, j = 1,2\} \\
 &\cup \{w_i^j v_i^2 | 1 \leq i \leq n, j = 1,2\} \cup \{u_0 x_0\} \cup \{x_0 y_i^j | 1 \leq i \leq n, j = 1,2,3\} \\
 &\cup \{y_i^{2j-1} z_i^j | 1 \leq i \leq n, j = 1,2\} \cup \{z_i^j y_i^2 | 1 \leq i \leq n, j = 1,2\}
 \end{aligned}$$

Teorema 2. Amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)}$ dengan $n \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil.

Bukti

Berdasarkan Definisi 1 diperoleh

$$\begin{aligned}
 p &= |V(DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)})| = 10n + 2 \text{ dan} \\
 q &= |E(DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)})| = 14n + 1.
 \end{aligned}$$

Definisikan fungsi pelabelan simpul $f: V(DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)}) \rightarrow \{0,1,2,3, \dots, 28n + 1\}$ sebagai berikut:

$$f(u_0) = 0 \tag{1}$$

$$f(v_i^j) = 6i + 2j - 7, 1 \leq i \leq n, j = 1,2,3 \tag{2}$$

$$f(w_i^j) = 28n - 14i + 2j + 6, 1 \leq i \leq n, j = 1,2 \tag{3}$$

$$f(x_0) = 6k + 1, 1 \leq i \leq n \tag{4}$$

$$f(y_i^j) = 6i + 2j - 6, 1 \leq i \leq n, j = 1,2,3 \tag{5}$$

$$f(z_i^j) = 20n - 14i + 2j + 5, 1 \leq i \leq n, j = 1,2 \tag{6}$$

Berdasarkan persamaan (1), (2), (3), (4), (5), dan (6) diperoleh fungsi setelah dilabel

$f(V(DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)})) = \{0,1,2,3, \dots, 28n - 4\} \subseteq \{0,1,2,3, \dots, 28n + 1\}$ dan fungsi pelabelan simpul f memberikan label yang berbeda pada setiap simpul sehingga fungsi f memenuhi pemetaan injektif.

Fungsi pelabelan simpul f akan menginduksi fungsi pelabelan busur $f^*: E(DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)}) \rightarrow \{1,3,5,7, \dots, 28n + 1\}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f^*(u_0v_i^j) = 6i + 2j - 7, 1 \leq i \leq n, j = 1,2,3 \tag{7}$$

$$f^*(v_i^{2j-1}w_i^j) = 28n - 8i + 6j - 3, 1 \leq i \leq n, j = 1,2 \tag{8}$$

$$f^*(w_i^jv_i^{2j}) = 28n - 8i + 2j + 3, 1 \leq i \leq n, j = 1,2 \tag{9}$$

$$f^*(u_0x_0) = 6n + 1, 1 \leq i \leq k \tag{10}$$

$$f^*(x_0y_i^j) = 6n + 6i + 2j - 5, 1 \leq i \leq n, j = 1,2,3 \tag{11}$$

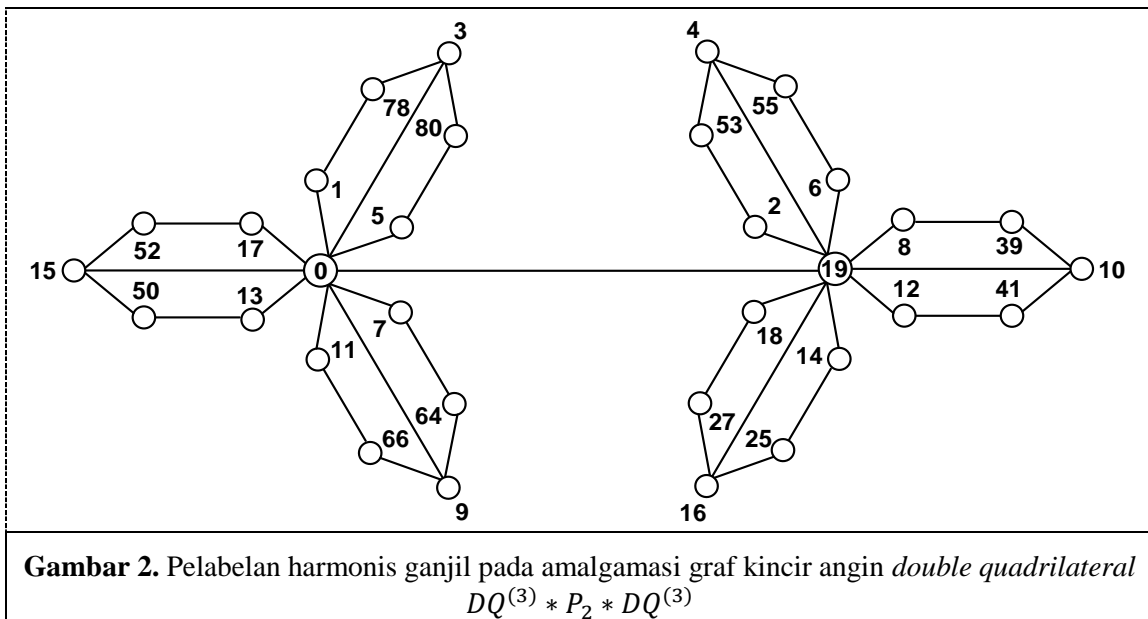
$$f^*(y_i^{2j-1}z_i^j) = 20n - 8i + 6j - 3, 1 \leq i \leq n, j = 1,2 \tag{12}$$

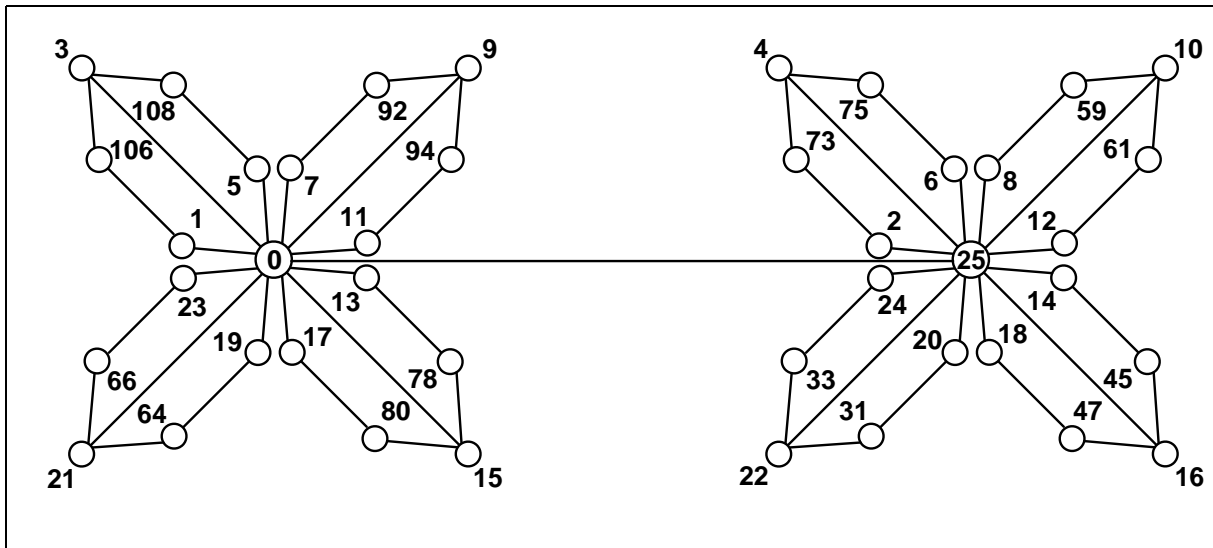
$$f^*(z_i^jy_i^{2j}) = 20n - 8i + 2j + 3, 1 \leq i \leq n, j = 1,2 \tag{13}$$

Berdasarkan persamaan (7), (8), (9), (10), (11), (12), dan (13) diperoleh fungsi setelah dilabel $f^*(E(DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)})) = \{1,3,5,7, \dots, 28n + 1\}$ dan fungsi pelabelan busur f^* memberikan label yang berbeda pada setiap busur sehingga fungsi f^* memenuhi pemetaan bijektif.

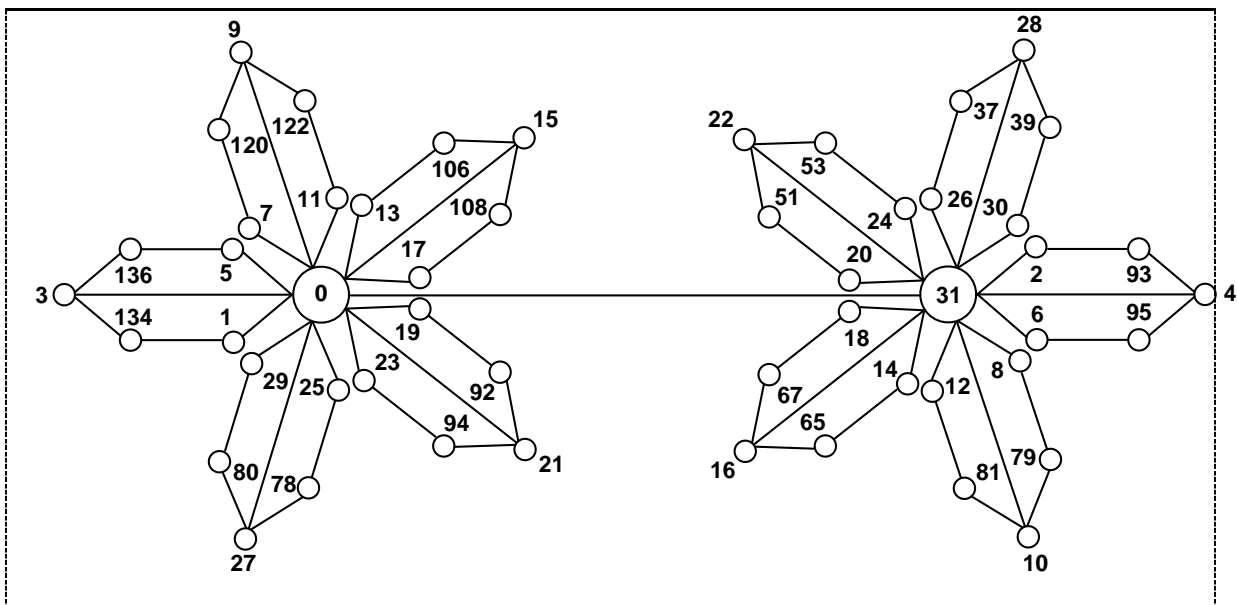
Akibatnya amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)}$ dengan $n \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil ■

Contoh 3. Diberikan contoh pelabelan harmonis ganjil amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(3)} * P_2 * DQ^{(3)}$ dalam Gambar 2, pelabelan harmonis ganjil amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(4)} * P_2 * DQ^{(4)}$ dalam Gambar 3 dan pelabelan harmonis ganjil amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(5)} * P_2 * DQ^{(5)}$ dalam Gambar 4.





Gambar 3. Pelabelan harmonis ganjil pada amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(4)} * P_2 * DQ^{(4)}$



Gambar 4. Pelabelan harmonis ganjil pada amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(5)} * P_2 * DQ^{(5)}$

4. Simpulan dan Saran

Simpulan

Simpulan yang diperoleh dari hasil penelitian ini berbentuk konstruksi amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)}$ dengan $n \geq 1$ (Definisi 1) dan konstruksi pelabelan harmonis ganjil pada amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(n)} * P_2 * DQ^{(n)}$ dengan $n \geq 1$ (Teorema 2). Pada bagian akhir diberikan beberapa contoh pelabelan harmonis ganjil pada amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* untuk mempermudah pemahaman.

Saran

Saran untuk peneliti berikutnya adalah mencari kelas graf baru yang belum ditemukan pelabelannya baik pelabelan harmonis ganjil maupun pelabelan jenis yang lain.

5. Daftar Pustaka

- [1] Abdel-Aal, M. E. (2014). New Families of Odd Harmonious Graphs. *International Journal of Soft Computing, Mathematics and Control*. 3(1), 1-13.
 - [2] Alyani, F., Firmansah, F., Giyarti, W., dan Sugeng, K. A. (2013). The Odd Harmonious Labeling of kC_n -Snake Graphs for Specific Values of n , that is, for $n = 4$ and $n = 8$. *Prosiding, IndoMS International Conference on Mathematics and Its Applications, Diselenggarakan oleh Program Studi Matematika, UGM dan IndoMS, 6-7 November 2013*. Yogyakarta: Indonesian Mathematical Society.
 - [3] Firmansah, F. (2016). Pelabelan Harmonis Ganjil pada Gabungan Graf Ular dan Graf Ular Berlipat. *Prosiding, Konferensi Nasional Matematika dan Pembelajarannya (KNPMP 1), Diselenggarakan oleh Program Studi Pendidikan Matematika, UMS, 12 Maret 2016*. Surakarta: Muhammadiyah University Press.
 - [4] Firmansah, F. (2017). The Odd Harmonious Labeling on Variation of the Double Quadrilateral Windmill Graphs". *Jurnal Ilmu Dasar*. 18(2), 109-118.
 - [5] Firmansah, F dan Syaifuddin, M.W. (2016). Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Kincir Angin Double Quadrilateral. *Magistra*. XXVIII(97), 71-77.
 - [6] Firmansah, F dan Syaifuddin, M.W. (2018). Pelabelan Harmonis Ganjil pada Amalgamasi Graf Kincir Angin Double Quadrilateral. *Fibonacci Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*. 4(1), 37-46.
 - [7] Firmansah, F., dan Sugeng, K. A. (2015). Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Kincir Angin Belanda dan Gabungan Graf Kincir Angin Belanda. *Magistra*. XXVII (94), 56-92.
 - [8] Firmansah, F. dan Yuwono, M. R. (2017). Odd Harmonious Labeling on Pleated of the Dutch Windmill Graphs. *Jurnal Chauchy – Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*. 4(4), 161-166.
 - [9] Firmansah, F. dan Yuwono, M. R. (2017). Pelabelan Harmonis Ganjil pada Kelas Graf Baru Hasil Operasi Cartesian Product. *Jurnal Matematika Mantik*. 3(2), 87-95.
 - [10] Firmansah, F. dan Yuwono, M. R. (2017). Pelabelan Harmonis Ganjil pada Kelas Graf Baru Hasil Operasi Gabungan. *Prosiding, Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika, Diselenggarakan oleh Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY, 11 November 2017*, Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.
 - [11] Gallian, J. A. (2016). A Dynamic Survey of Graph Labeling". *The Electronic Journal of Combinatorics*, 18. #DS6.
 - [12] Jeyanthi, P, Philo, S, dan K. A. Sugeng. (2015). Odd Harmonious Labeling of Some Some New Families of Graphs. *SUT Journal of Mathematics*. 51(2), 53-65.
 - [13] Liang, Z., dan Bai, Z. (2009). On The Odd Harmonious Graphs with Applications. *J. Appl. Math. Comput*, 29,105-116.
- Saputri, G. A., Sugeng, K. A., dan Froncek, D. (2013). The Odd Harmonious Labeling of Dumbbell and Generalized Prims Graphs, *AKCE Int, J. Graphs Comb*. 10(2), 221-228.

Vaidya, S. K., dan Shah, N. H. (2012). Odd Harmonious Labeling of Some Graphs". *International J. Math. Combin*, 3, 105-112.

Vaidya, S. K., dan Shah, N. H. (2011). Some New Odd Harmonious Graphs". *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, 1(1), 9-16.

Ucapan terima kasih

Peneliti mengucapkan terima kasih kepada Ristek Dikti atas dukungan financial terhadap pelaksanaan penelitian ini melalui skema Hibah Penelitian Dosen Pemula (PDP) tahun 2018.