Model 2-Regime Self-Exciting Threshold Autoregressive (SETAR)

Husnun N. G. P. Riyansyah, Dewi R. S. Saputro

Program Studi Matematika, FMIPA Universitas Sebelas Maret

Abstract. Runtun waktu adalah himpunan amatan yang dicatat berdasarkan urutan waktu. Salah satu model runtun waktu adalah model *Autoregressive*, model tersebut belum mampu menjelaskan perubahan struktur sebagai akibat terjadinya lompatan beberapa data dalam satu kurun waktu tertentu. Model yang dapat menjelaskan perubahan struktur adalah keluarga model *Threshold Autoregressive* (TAR) merupakan salah satu model penting dalam model deret waktu nonlinear karena kepraktisannya. Dasar dalam model TAR adalah penggunaan *regime* yang berbeda dalam analisis *Autoregressive*. Model *Self-Exciting Threshold Autoregressive* (SETAR) adalah keluarga model TAR dengan parameter delay tiap regimenya sama. *Delay* adalah satuan waktu yang menyebabkan pergeseran waktu dalam input data akan tetapi tidak memengaruhi karakteristik data. Model SETAR memiliki sifat linier dalam tiap *regime* akan tetapi nonlinear apabila model-model tiap *regime* digabung. *Regime* adalah partisi dari ruang real dengan masing-masing partisi berisi interval terbuka tertutup. Model SETAR dapat membangkitkan dinamika nonlinear yang kompleks, fenomena yang tidak simetris dan dapat menghasilkan fenomena asimetris dan lompatan data yang tidak dapat ditangkap oleh model deret waktu linier. Hal ini berarti model SETAR memiliki tingkat fleksibilitas tinggi dalam parameter melalui perilaku *switching regime*. Tujuan penelitian ini untuk melakukan kajian struktur model 2-regime SETAR dan perubahannya. Metode yang digunakan untuk mengestimasi parameter pada model tersebut adalah *Ordinary Least Square* (OLS).

Keyword. *Self-Exciting Threshold Autoregressive* (SETAR), nonlinear, OLS.

1. Pendahuluan

Menurut Wei [5], analisis runtun waktu adalah suatu analisis statistik yang dapat diterapkan pada data yang berhubungan dengan waktu. Analisis runtun waktu bertujuan untuk menemukan pola data di masa lalu yang sering digambarkan dalam bentuk model.waktu adalah himpunan amatan yang dicatat berdasarkan urutan waktu. Dalam analisis runtun waktu terdapat model linear dan nonlinear. Menurut Hanke dan Winchern [1], model linear runtun waktu antara lain, *Moving Average*, *Naïve*, *Exponential Smoothing*, *Holt*, dan *Winter*. Model-model tersebut digunakan untuk data yang mengandung hubungan linear. Akan tetapi, pada praktiknya model-model linear tersebut seringkali tidak dapat menjelaskan data yang tidak stabil akibat terjadinya loncatan data yang terjadi secara tiba-tiba. Untuk mengatasi permasalahan tersebut, pemodelan deret waktu nonlinear diperkenalkan salah satunya ialah *Threshold Autoregressive* (TAR). Model TAR merupakan model *Autoregressive* (AR) tersegmen sehingga diantara segmen (*regime*) yang berbeda dimungkinkan untuk mempunyai model AR yang berbeda. Model TAR mengalami perkembangan salah satunya ialah model *Self-Exciting Threshold Autoregressive* (SETAR). Model SETAR memiliki keistimewaan yaitu dapat membangkitkan dinamika

nonlinear yang kompleks dan menangkap data yang tidak bisa ditangkap oleh model runtun waktu linear. Oleh karena itu, pada penelitian ini penulis tertarik untuk mengkaji pemodelan runtun waktu nonlinear SETAR. Pada penelitian ini, pemodelan SETAR yang dikaji dibatasi hanya untuk kasus dua *regime* dan ditekankan pada kajian estimasi parameter model SETAR. Tujuan dari penelitian ini adalah mengkaji pemodelan runtun waktu nonlinear menggunakan model SETAR dua *regime* dan mengestimasi parameter dengan metode *Ordinary Least Square* (OLS).

2. Metode Penelitian

3.1 Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah kajian pustaka yaitu mempelajari referensi berupa buku-buku, jurnal, maupun tulisan mengenai statistika, khususnya pemodelan pada analisis runtun waktu yaitu model *Self-Exciting Threshold Autoregressive*. Langkah – langkah yang dilakukan dalam penelitian untuk menentukan model *2-regime* SETAR dan estimator model SETAR adalah (1) mempelajari model *Autoregressive* (2) mempelajari model *Self-Exciting Threshold Autoregressive* (3) menentukan model *2-regime Self-Exciting Threshold Autoregressive* (4) menentukan persamaan residu (5) menentukan jumlah kuadrat residu (6) meminimumkan jumlah kuadrat residu (7) memperoleh estimator model *Self-Exciting Threshold Autoregressive*.

3. Hasil Penelitian

3.1 Model *Autoregressive*. Menurut Wei [5], model *Autoregressive* merupakan model yang menggambarkan bahwa data periode sekarang dipengaruhi oleh data periode sebelumnya. Model *Autoregressive* berorde p adalah model runtun waktu linear yang dinotasikan dengan $AR(p)$. Model *Autoregressive* merupakan model linear untuk data stasioner dan dapat diartikan model yang merupakan hasil regresi dengan dirinya sendiri. Bentuk umum model $AR(p)$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$Z_t = \phi_0 + \sum_{n=1}^p \phi_n Z_{t-n} + \varepsilon_t \quad (1)$$

dengan Z_t merupakan data pada periode t ($t = 1, 2, 3, \dots, T$), Z_{t-n} merupakan data pada periode $t-n$ ($n = 1, 2, 3, \dots, p$), ε_t merupakan error pada saat t , ϕ_0 merupakan konstanta, ϕ_n merupakan koefisien *Autoregressive*.

3.2 Model *Threshold Autoregressive* (TAR). Model TAR pertama kali diteliti oleh Tong pada tahun 1983 [3] dan 1990 [4]. Model runtun waktu yang bersifat nonlinear salah satunya ialah model *Threshold Autoregressive* (TAR). Model TAR terbentuk dari beberapa faktor nonlinear yang biasa ditemukan dalam pengaplikasiannya seperti adanya data yang asimetris yaitu adanya sifat data yang memuat pola naik dan turun suatu proses. Model TAR dapat dituliskan sebagai

$$Z_t = \phi_0 + \sum_{n=1}^p \phi_n Z_{t-n} + \varepsilon_t \text{ jika } s_{t-k} \in R \quad (2)$$

dengan Z_t merupakan data deret waktu ke- t ($t = 1, 2, 3, \dots, T$), ϕ_0 merupakan konstanta, ϕ_n merupakan koefisien *Autoregressive*, ε_t merupakan error pada saat t , k merupakan *lag* yang digunakan untuk menentukan seberapa jauh *lag* dari *state determining variable*, d merupakan *delay*, s_{t-k} merupakan *state determining variable*.

3.3 Model *Self-Exciting Threshold Autoregressive* (SETAR). Model SETAR adalah keluarga model TAR dengan parameter *delay* tiap *regimenya* sama. Model SETAR memiliki keistimewaan yaitu dapat menangkap loncatan data yang tidak dapat ditangkap oleh model deret waktu linear. Model SETAR juga ditentukan oleh order *Autoregressive* (p). Model SETAR ditentukan oleh jumlah *regime* (m), order *Autoregressive* (p), parameter *delay* dan *variable threshold*. Penulisan model SETAR dengan m *regime* dengan *regime* pertama mengikuti $AR(p_1)$, *regime* kedua mengikuti $AR(p_2)$, dan seterusnya sampai dengan *regime* ke- m mengikuti $AR(p_m)$ yang dinotasikan dengan $SETAR(m, p_1, p_2, \dots, p_m)$. Menurut Ekananda [2], persamaan umum model SETAR dapat dituliskan sebagai berikut

$$Z_t = \phi_{0,j} + \sum_{n=1}^{p_j} \phi_{n,j} Z_{t-n} + \varepsilon_t \text{ jika } Z_{t-d} \in R_j \quad (3)$$

dengan d merupakan *delay* atau efek dari orde maksimum atau *lag* yang keluar dari pita PACF, p_j merupakan orde *Autoregressive* pada *regime* ke- j , R_j merupakan nilai *threshold* yang pada *regime* ke- j , Z_t merupakan deret waktu ($t = 1, 2, \dots, T$), ϕ_{0j} : konstanta pada *regime* ke- j ($j = 1, 2, \dots, m$), $\phi_{n,j}$ merupakan koefisien parameter *Autoregressive* ke- n pada *regime* ke- j , ε_t merupakan error pada saat t . ($a_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$). *Delay* adalah suatu satuan waktu yang menyebabkan pergeseran waktu pada saat proses input data namun tidak menyebabkan perubahan karakteristik data, sedangkan *regime* adalah partisi ruang real dengan masing-masing partisi berisi interval terbuka tertutup. Penerapan model SETAR umumnya digunakan pada data ekonomi salah satunya inflasi dengan model 2-*regime* SETAR.

Berdasarkan model (3), model 2-*regime* SETAR dapat dituliskan sebagai berikut

$$Z_t = \begin{cases} \phi_{0,1} + \sum_{n=1}^{p_1} \phi_{n,j} Z_{t-n} + \varepsilon_t \text{ jika } Z_{t-d} \leq r_1 \\ \phi_{0,2} + \sum_{n=1}^{p_2} \phi_{n,j} Z_{t-n} + \varepsilon_t \text{ jika } Z_{t-d} > r_2. \end{cases} \quad (4)$$

Model (4) merupakan model 2-*regime* SETAR atau dinotasikan dengan SETAR(2, p_1 , p_2). Model SETAR(2, p_1 , p_2) menunjukkan model SETAR dengan dua *regime* (*lower* dan *upper*), yaitu *regime* pertama atau *regime lower* mengikuti model AR(p_1) dan *regime* kedua atau *regime upper* mengikuti model AR(p_U) dengan parameter *delay* d dan *threshold* r_1 dan r_2 .

3.1 Estimasi Parameter. Model SETAR dapat diestimasi menggunakan metode *Ordinary Least Square*. Pada tahap estimasi parameter dilakukan pendugaan terhadap parameter dari model dugaan yang diperoleh pada tahap sebelumnya. Model 2-*regime* SETAR seperti pada model (4) merupakan model nonlinear, tetapi model ini dapat didekati dengan model linear dengan cara membuat dua model terpisah untuk masing-masing *regime*, yaitu

$$Z_{t,1} = \phi_{0,1} + \sum_{n=1}^{p_1} \phi_{n,j} Z_{t-n} + \varepsilon_{t,1} \quad (5)$$

$$Z_{t,2} = \phi_{0,2} + \sum_{n=1}^{p_2} \phi_{n,j} Z_{t-n} + \varepsilon_{t,2}. \quad (6)$$

Persamaan (5) dan (6) dapat dijabarkan sebagai berikut

$$Z_{t,1} = \phi_{0,1} + \phi_{1,1} Z_{t-1} + \phi_{2,1} Z_{t-2} + \dots + \phi_{p_1,1} Z_{t-p_1} + \varepsilon_{t,1} \quad (7)$$

$$Z_{t,2} = \phi_{0,2} + \phi_{1,2} Z_{t-1} + \phi_{2,2} Z_{t-2} + \dots + \phi_{p_2,2} Z_{t-p_2} + \varepsilon_{t,2}. \quad (8)$$

Persamaan (7) dan (8) dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks menjadi

$$Z = X\varphi + E \quad (9)$$

dengan Z merupakan vektor yang terdiri dari data deret waktu *regime lower* dan *regime upper* yaitu $Z_{t,1}, Z_{t+1,1}, \dots, Z_{T,1}, Z_{t,2}, Z_{t+1,2}, \dots, Z_{T,2}$ dengan ukuran $[n - p_1 - p_2, 1]$, X merupakan matriks variable independent yaitu $1, Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-p}$ berukuran $[n - p_1 + p_2, p_1 + p_2 + 1]$, φ merupakan vektor parameter model dengan ukuran $[p_1 + p_2 + 1, 1]$, E merupakan vektor residual $[n - p_1 - p_2, 1]$.

Menurut prinsip metode *Least Square*, estimator OLS untuk parameter $\varphi = \hat{\varphi}$ dapat dicari dengan meminimumkan jumlah kuadrat error.

$$L(\varphi) = E^T E = (Z - X\varphi)^T (Z - X\varphi) = Z^T Z - 2(X^T Z)^T \varphi + \varphi^T (X^T X) \varphi$$

$L(\varphi)$ merupakan fungsi yang kontinu dan diferensiabel terhadap φ maka $\varphi = \hat{\varphi}$ dapat dicari dengan menyelesaikan persamaan $\frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} = 0$. Karena jumlah kuadrat error

$$L(\varphi) = Z^T Z - 2(X^T Z)^T \varphi + \varphi^T (X^T X) \varphi$$

maka turunan petamanya terhadap φ adalah $\frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} = -2(X^T Z)^T + 2X^T X \varphi$. Karena, $\frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} = 0$ maka diperoleh

$$X^T X \varphi = X^T Z. \quad (10)$$

Jadi, estimator OLS untuk parameter φ adalah

$$\hat{\varphi} = (X^T X)^{-1} X^T Z$$

4. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut

4.1 Model *self-exciting threshold autoregressive* (SETAR) adalah keluarga model TAR dengan parameter *delay* tiap regimennya sama. Bentuk umum dari model SETAR adalah

$$Z_t = \phi_{0,j} + \sum_{n=1}^{p_j} \phi_{n,j} Z_{t-n} + \varepsilon_t \text{ jika } Z_{t-d} \in R_j$$

4.2 Model 2-regime SETAR atau model SETAR(2, p_L, p_U) adalah

$$Z_t = \begin{cases} \phi_{0,1} + \sum_{n=1}^{p_1} \phi_{n,j} Z_{t-n} + \varepsilon_t \text{ jika } Z_{t-d} \leq r_1 \\ \phi_{0,2} + \sum_{n=1}^{p_2} \phi_{n,j} Z_{t-n} + \varepsilon_t \text{ jika } Z_{t-d} > r_2. \end{cases}$$

4.3 Estimasi parameter model SETAR dilakukan menggunakan metode *Ordinary Least Square* (OLS). Estimator model SETAR dua *regime* adalah

$$\hat{\phi} = (X^T X)^{-1} X^T Z$$

5. Daftar Pustaka

- [1] Hanke, John E., Dean W. Winchern 2009 *Business Forecasting* (USA: Pearson Education International).
- [2] Ekananda, Mahyus 2016 *Analisis Ekonometrika Time Series* (Jakarta: Mitra Wacana Media).
- [3] Tong, H 1983 *Threshold Models in Nonlinear Time Series Analysis* (New York: Springer).
- [4] Tong, H 1990 *Nonlinear Time Series: A Dynamical System Approach* (Oxford: Oxford University Press).
- [5] Wei, W. W. S. 2006 *Time Series Analysis Univariate and Multivariate Second Edition* (New York: Addison Wesley Publishing)